

ОГЛАВЛЕНИЕ II-го ТОМА.

Предисловіе ко II тому.

1-ая секція. Учебная литература по математикѣ.

Предисловіе къ 1-ой секціи.

Первое засѣданіе.

Докладъ В. В. Піотровскаго: «Обзоръ современной учебной литературы по алгебрѣ».

Учитель литературы по математикѣ, составленный К. П. Деруновымъ.

Докладъ А. Р. Кулишера: «Обзоръ нѣкоторыхъ рукописей по элементарной геометріи».

Докладъ В. Х. Майлеля: «Обзоръ литературы по арифметикѣ младшихъ и среднихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній».

Докладъ Н. Н. Тяпкиной: «Обзоръ 4-хъ учебниковъ по арифметикѣ».

Докладъ П. Р. Мрочекъ: «Обзоръ литературы на русскомъ языкѣ по методикѣ арифметики».

Второе засѣданіе.

Докладъ П. А. Павольскаго: «Современное состояніе курса геометріи въ средней школѣ въ связи съ обзоромъ наиболее распространенныхъ учебниковъ».

Пренія по докладу П. А. Павольскаго.

Докладъ Н. Н. Володкинча: «О реальномъ направленіи преподаванія математики въ связи съ жизненными и научными фактами».

Докладъ В. А. Соколова: «Обоснованіе арифметическихъ дѣйствій».

Пренія по докладу В. А. Соколова.

Сообщеніе А. В. Годнева.

Пренія по сообщенію А. В. Годнева.

Третье засѣданіе.

Пренія по докладу В. Р. Мрочекъ.

Пренія по докладу Н. Н. Володкинча.

2-ая секція. Программы и экзамены.

Предисловіе ко 2-й секціи.

Первое засѣданіе.

Докладъ П. А. Тамашевой: «О реформѣ преподаванія математики. Общія положенія и программы. Содержаніе курса математики за первые шесть лѣтъ обученія».

Пренія по докладу П. А. Тамашевой.

Докладъ Г. Н. Кузнецова: «О нѣкоторыхъ замѣненіяхъ въ программахъ по алгебрѣ въ женскихъ гимназіяхъ Министерства Нар. Пр., которая желательно было бы сдѣлать временно впродѣ до общей реформы женскихъ гимназій».

Пренія по докладу Г. П. Кузнецова	171
Второе засѣданіе.	
Сообщеніе проф. П. А. Некрасова: «О результатахъ преподаванія началъ аналѣза бесконечно-малыхъ, аналѣтической геометріи и теорѣтической арифметики въ реальныхъ училищахъ и въ гимназіяхъ»	176
Пренія по сообщенію проф. П. А. Некрасова	177
Докладъ В. А. Марковича: «Къ вопросу объ экзаменахъ по математикѣ въ средней школѣ»	179
Пренія по докладу В. А. Марковича	182

3-я секція. Методика математики.

Предисловіе къ 3-ей секціи	187
--------------------------------------	-----

Первое засѣданіе.	189
----------------------------------	-----

Докладъ Д. Д. Галашина: «Объ измѣненіи метода обученія въ высшей и средней школѣ»	190
Пренія по докладу Д. Д. Галашина	197
Докладъ С. А. Неволятаускаго: «Начала логики въ курсѣ школьной геометріи»	202
Докладъ К. О. Лебединцева: «Методъ обученія математикѣ въ старой и новой школѣ»	207

Второе засѣданіе.

Докладъ К. О. Лебединцева: «Вопросъ о дробяхъ въ курсѣ арифметики»	209
Пренія по докладу К. О. Лебединцева	227
Докладъ В. А. Крогуса: «Приближенныя и сокращенныя вычисленія въ средней школѣ»	231
Пренія по докладу В. А. Крогуса	244
Докладъ Д. М. Левитуса: «Объ алгебраическихъ преобразованіяхъ»	245

Третье засѣданіе.

Докладъ О. А. Эриа: «Спорные вопросы въ методикѣ арифметики»	251
Докладъ Н. М. Попова: «О лабораторныхъ занятіяхъ по математикѣ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Кавказскаго учебнаго округа»	266
Пренія по докладу Н. М. Попова	272
Докладъ В. А. Марковича: «Отдѣлъ логарифмовъ въ средней школѣ»	273
Пренія по докладу В. А. Марковича	281
Докладъ Д. Э. Теппера: «О графическомъ методѣ рѣшенія системъ уравненій»	286

Четвертое засѣданіе.

Докладъ И. М. Травчкова: «О первой теоремѣ элементарной геометріи Евклида»	296
Докладъ И. И. Александрова: «Построеніе параллелограммовъ»	300
Докладъ Е. С. Томашевича: «Принципы совмѣстности плоскихъ и пространственныхъ фигуръ»	301
Докладъ Д. М. Левитуса: «Роль геодезическихъ упражненій при обученіи математикѣ»	311
Пренія по докладамъ: Е. С. Томашевича, Д. М. Левитуса, О. А. Эриа и К. О. Лебединцева	317
Докладъ Л. А. Сельскаго: «Вопросъ объ измѣреніяхъ и мѣрахъ въ системѣ арифметики»	319

4-ая и 5-ая секціи. Преподаваніе математики въ техниче- скихъ и коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ.

Докладъ М. И. Фрэнка: «Курсъ анализа въ среднихъ техниче- скихъ заведеніяхъ»	323
Пренія по докладу М. И. Фрэнка и постановленія 4-й секціи . .	327
Докладъ проф. И. А. Некрасова: «О необходимыхъ отдѣлахъ ма- тематикъ для экономическихъ наукъ»	332
Пренія по докладу проф. И. А. Некрасова.	331
Тезисы доклада И. И. Вакуменко: «О постановкѣ преподаванія математики въ коммерческихъ училищахъ»	331
Пренія по докладу И. И. Вакуменко и постановленія 5-ой секціи.	335
<hr/>	
Алфавитный списокъ лицъ, выступавшихъ на Съездѣ въ секціяхъ.	339
Перечень докладовъ, вошедшихъ въ 1-й и 2-й томы	340
Списокъ членовъ	346
Опечатки	361
Объявленія	365

Во 2-й томъ „Трудовъ 1-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики“, вошли доклады, сдѣланные въ секціяхъ. Президіумъ секцій составляли слѣдующія лица: 1-й (учебная литература) — *М. Г. Попруженко, Б. Б. Пюторскій, Б. В. Грибовскій и Н. П. Зубковскій*; 2-й (программы и экзамены) — проф. *С. Г. Петровичъ и Н. А. Самохваловъ*; 3-ей (методика преподаванія) — *С. И. Шохоръ-Троцкій, В. А. Кройусъ, А. Е. Душина, К. П. Зреле, А. П. Лафентьева и С. Р. Соколовскій*; 4-й (техническія училища) — *М. Л. Франкъ и Е. П. Полункинъ*; 5-й (коммерческія училища) — проф. *Н. А. Некрасовъ, А. О. Гатлихъ и В. П. Литвинскій*. Матеріалъ для 2-го тома разработанъ президіумомъ секцій.

Въ приложеніи помѣщены: алфавитный списокъ лицъ, выступавшихъ въ собраніяхъ секцій; алфавитный списокъ членовъ Съѣзда; перечень вошедшихъ въ оба тома докладовъ, сгруппированныхъ по категоріямъ примѣнительно къ программѣ Съѣзда (§ 4-й Положенія).

Денежный отчетъ по Съѣзду будетъ данъ по полученіи наложенныхъ на 2-й томъ платежей. Тогда же выяснится, возможно-ли выпустить прибавленіе ко 2-му тому, заключающее обзоръ выставки, состоявшейся при Съѣздѣ, и доклады, допущенные организаціоннымъ Комитетомъ на Съѣздъ, но, по разнымъ причинамъ, оставшіеся не прочитанными.

З. Максимовъ.

Іюль, 1913.

1-я секція.

Учебная литература по математикѣ.

Предсѣдатель секціи: М. Г. Попруженко.

Товарищъ предсѣдателя: Б. В. Піотровскій.

Секретари: В. В. Грибовскій и П. И. Зубковскій.

Организаціоннымъ Комитетомъ Съѣзда были объявлены въ программѣ Съѣзда слѣдующіе доклады къ заслушанію въ 1-ой секціи:

1) *И. А. Извольскій* (Москва). «Современное состояніе курса геометріи въ связи съ обзоромъ наиболѣе распространенныхъ учебниковъ».

2) *А. Р. Кулишевъ* (Спб.). «Обзоръ современной учебной литературы по геометріи».

3) *Б. Б. Піотровскій* (Спб.). «Обзоръ современной учебной литературы по алгебрѣ».

4) *В. Х. Майделъ* (Спб.). «Обзоръ современной учебной литературы по арифметикѣ» (общіе курсы).

Трудъ по обзору литературы по арифметикѣ былъ раздѣленъ между В. Х. Майделемъ и Л. Н. Тяпкиной, поэтому въ журналѣ засѣданій секціи вслѣдъ за докладомъ В. Х. Майделя приводится и докладъ Л. Н. Тяпкиной, хотя она своего доклада въ засѣданіи и не читала.

Предисловіе.

5) В. Р. Мрочекъ (Сиб.). «Обзоръ современной литературы на русскомъ языкѣ по методикѣ арифметики».

*) 6) Н. В. Годи́нский (Сиб.). «Обзоръ современной учебной литературы по арифметикѣ (курсы теоретической арифметики, для старшихъ классовъ) и по тригонометріи».

*) 7) В. А. Шифръ (Сиб.). «Обзоръ современной учебной литературы по аналитической геометріи».

*) 8) Р. Д. Пономаревъ (Харьковъ). «Объ организаціи педагогическихъ библіотекъ по математикѣ и о педагогической библіотекѣ Харьковскаго математическаго общества».

*) 9) Д. М. Синцовъ, проф. (Харьковъ). «О Харьковской математической библіотекѣ».

10) Н. Н. Володкевичъ (Кіевъ). «О реальномъ направленіи преподаванія математики въ связи съ жизненными фактами».

Въ выше приведенномъ перечнѣ докладовъ отмѣчены зѣвзѣдочкой тѣ изъ нихъ, которые не состоялись.

Сверхъ докладовъ, объявленныхъ въ программѣ съѣзда, секціей были заслушаны:

1) Сообщение А. В. Годнева (Симбирскъ) о составленномъ имъ курсѣ геометріи.

2) Заявленіе Н. А. Сельскаго о составленномъ имъ задачникѣ по арифметикѣ—это заявленіе было заслушано въ связи съ препіямн по докладу Н. Н. Володкевича «О реальномъ направленіи преподаванія математики въ связи съ жизненными фактами».

3) Докладъ В. А. Соколова (Майкопъ, Кубанской обл.). «Обоснованіе арифметическихъ дѣйствій».

Секція имѣла три засѣданія: 28-го, 30-го декабря и 2-го января.

Доклады, посвященные обзору учебной литературы по тому или иному изъ отдѣловъ курса математики средней школы, носили по преимуществу информационный характеръ; докладчики не входили въ детальный разборъ учебниковъ и ихъ критику, отмѣчая лишь, главнымъ образомъ, тѣ или иные направленія въ современной литературѣ и указывая ихъ представителей; поэтому эти доклады и не вызывали препій, хотя

по поводу нѣкоторыхъ изъ нихъ членами съѣзда были высказаны замѣчанія и дополненія. Наиболѣе оживленныя препія были вызваны докладами П. А. Извольскаго и Н. Н. Володкевича и сообщеніемъ А. В. Годнева.

Въ первомъ своемъ засѣданіи секція, по предложенію председателя, почтила вставаніемъ память покойнаго А. И. Гольденберга, какъ выдающагося работника въ русской учебной математической литературѣ. Председателемъ секціи былъ возбужденъ вопросъ о математической хрестоматіи и было предложено желающимъ членамъ секціи образовать особое совѣщаніе, посвященное болѣе детальному обсужденію этого вопроса, но, несмотря на весьма сочувственное отношеніе секціи къ вопросу о математической хрестоматіи, совѣщаніе это не состоялось, вѣроятно, за недостаткомъ времени и обремененностью работой членовъ Съѣзда.

Подводя итогъ работы секціи, можно указать, что эта работа отразилась на слѣдующихъ резолюціяхъ, принятыхъ въ общемъ собраніи Съѣзда 3-го января.

«Съѣздъ признаетъ своевременнымъ опустить изъ курса математики средней школы нѣкоторые вопросы второстепеннаго значенія, провести черезъ курсъ и ярко освѣтить идею функциональной зависимости, а также—въ цѣляхъ сближенія преподаванія въ средней школѣ съ требованіями современной науки и жизни—ознакомить учащихся съ простѣйшими и несомнѣнно доступными имъ идеями аналитической геометріи и анализа».

«Съѣздъ признаетъ крайне желательнымъ, чтобы авторы настоящихъ и будущихъ учебниковъ приняли во вниманіе точки зрѣнія, изложенныя въ предыдущемъ пунктѣ настоящихъ резолюцій. Въ частности признается желательнымъ выработка задачникъ, соответствующихъ кругу интересовъ учащихся на каждой ступени ихъ обученія и включающихъ въ себя данныя изъ физики, космографіи, механики и пр., а также составленіе математической хрестоматіи, дополняющей и углубляющей свѣдѣнія, выносимыя учащимися изъ обязательной программы».

«Въ цѣляхъ повышенія спеціального и педагогическаго самообразованія преподавателей желательно, чтобы бібліотеки учебныхъ заведеній были въ полной мѣрѣ снабжены необходимыми учеными, учебными, методическими сочиненіями, справочными изданіями и журналами».

«Съѣздъ признаетъ желательнымъ, чтобы педагогическимъ совѣтамъ учебныхъ заведеній было предоставлено больше самостоятельности въ дѣлѣ распредѣленія учебнаго матеріала по классамъ и въ выборѣ учебныхъ руководствъ».

Первое засѣданіе.

28 декабря 8 ч. вечера.

Предсѣдательствовалъ М. Г. Попруженко.

При открытіи Собранія, предсѣдателемъ было заявлено, что секція не ставила своей цѣлью дать подробный разборъ и оцѣнку учебниковъ; точно также не пылось въ виду выносить резолюціи относительно пригодности каждаго изъ нихъ. Докладчикамъ было поручено ознакомить интересующихся съ содержаніемъ различныхъ учебниковъ и отмѣтить ихъ главнѣйшія особенности. Критиковать учебники не предполагалось: но возможно, что попутно будутъ сдѣланы и указанія на недочеты. Докладчики пѣли въ виду, главнымъ образомъ, наиболѣе учебную литературу; перечислять же весь перечень существующихъ учебниковъ не могли изъ за недостатка времени.

Послѣ этого заявленія, предсѣдателемъ былъ возбужденъ вопросъ о математической хрестоматіи.

Предсѣдатель. «Среди различныхъ группъ педагоговъ уже давно возбуждался вопросъ о математической хрестоматіи, т.-е. о такой книгѣ, которая предназначена для самостоятельной работы учениковъ, съ цѣлью углубленія и расширенія ихъ математическихъ знаній, сообщенія историческихъ и философскихъ элементовъ, ознакомленія съ математическими первоисточниками и пр. Первая мысль о такой хрестоматіи возникла послѣ смерти незабвеннаго А. И. Гольденберга въ связи съ желаніемъ использовать для этой хрестоматіи статьи «Математическаго Листка», издававшихся покойнымъ педагогомъ.

Затѣмъ мысль объ этой хрестоматіи подвергалась различнымъ эволюціямъ, и теперь она предлагается вашему обсужденію безъ всякаго предпріименія вопроса о томъ, въ какой формѣ реализуется ея осуществленіе».

Собраніе просило внести вопросъ о хрестоматіи въ Организаціонный Комитетъ Съезда *).

Затѣмъ, въ краткихъ, но теплыхъ выраженіяхъ упомянулъ председатель педагогическую дѣятельность умершаго А. И. Гольденберга, и Собраніе почтительно память умершаго педагога вставившемъ.

Прочитано письмо проф. Императорскаго Университета Св. Владиміра П. М. Вубнова, въ которомъ онъ шлетъ привѣтствіе Съезду и предлагаетъ безплатно желающимъ членамъ Съезда 100 экземпляровъ готовясяемаго имъ къ печати труда «Древній Абакъ—колыбель современной арифметики». Профессоръ въ пономѣ своемъ трудѣ, представляющемъ переработку вышедшей въ свѣтъ въ 1911 г. его книги «Подлинное сочиненіе Гербарта объ Абакѣ», предполагаетъ опустить нѣкоторыя филологическія изысканія, мало интересующія математиковъ по специальности, а остановиться, главнымъ образомъ, на систематическомъ изложеніи Абака и на численныхъ примѣрахъ.

Предложено членамъ Съезда, желающимъ получить готовясяемый къ печати трудъ проф. Вубнова, записаться на особомъ листѣ съ указаніемъ своего адреса. За пересылку будетъ наложенъ платежъ.

Послѣ оглашенія этого письма, по просьбѣ участника собранія В. Я. Гебеля, ему было предоставлено слово объ умершемъ А. И. Гольденбергѣ.

В. Я. Гебель (Москва). «На приглашеніе г-на председателя собранія вамъ угодно было почтить память покойнаго А. И. Гольденберга. Я имѣю счастье звать этого замѣчательнаго педагога въ послѣдніе годы его жизни, поэтому считаю своимъ долгомъ подѣлиться съ вами своими воспоминаніями. Представьте себѣ сѣдого худощаваго человѣка со слѣ-

*) См. Революціи Съезда.

дами болѣзненности на утомленномъ лицѣ, но съ быстро загоряющимися живыми глазами, со страстной нервной рѣчью на устахъ, когда дѣло шло о дѣлѣ, которому онъ отдавалъ свою жизнь и свой талантъ, когда дѣло шло о математикѣ.

Таковъ былъ А. И. Гольденбергъ въ послѣдніе годы своей жизни. Артиллеристъ по образованію, онъ доказалъ своею жизнью и дѣятельностью, что не спеціальное или профессиональное образованіе, а горячая любовь и призваніе къ наукѣ и преподаванію—создаютъ истиннаго педагога. Велика была его работа, велика была и его скромность. Въ журналѣ, о которомъ упомянулъ г. председатель, въ «Математическомъ Листкѣ», созданномъ А. И. Гольденбергомъ и представлявшемъ первый въ Россіи журналъ для преподавателей и любителей элементарной математики, большая часть статей была написана имъ безъ всякой подписи.

Въ послѣдніе годы, со всею рвениемъ своей пылкой натуры, онъ отдался интересамъ преподаванія математики въ начальной народной школѣ, ведя руководящія бесѣды на педагогическихъ сѣздахъ для народныхъ учителей. Даже въ послѣднемъ предсмертномъ бреду онъ говорилъ о палочкахъ, прутикахъ, соломинкахъ (наглядныхъ пособіяхъ по счету). Мы исполнили только свой долгъ, почтивъ память такого самоотверженнаго, славнаго педагога!

1. Обзор современной учебной литературы по алгебре.

Докладъ В. В. Піотровскаго (Сиб.)

«Въ настоящемъ докладѣ не имѣется въ виду дать исчерпывающій обзоръ всѣхъ современныхъ руководствъ и пособій по предмету алгебры. Цѣль доклада — отмѣтить лишь различныя направленія въ литературѣ этого предмета и кратко характеризовать ихъ представителей: при этомъ, прежде всего приходится обратить вниманіе на то новое направленіе въ преподаваніи математики, которое въ теченіе послѣднихъ 10—15 лѣтъ наблюдается въ Западной Европѣ и успѣло уже вылиться въ конкретныя формы во французскихъ учебникахъ Бореля, Бурле-Таннера и другихъ, составленныхъ согласно новымъ программамъ 1902 и 1905 г.г., а также въ нѣкоторыхъ нѣмецкихъ руководствахъ, составленныхъ въ духѣ идей, представителями которыхъ являются Феликсъ Клейнъ и составители Меранскаго плана. Не входя въ подробную характеристику этого новаго направленія, которое уже находитъ откликъ и въ русской педагогической мысли, напомнимъ лишь его существенныя черты:

1) Содержаніе курса и методы изложенія должны быть на различныхъ ступеняхъ обученія согласованы съ психологіей возраста учащихся. Вслѣдствіе этого, на первыхъ ступеняхъ обученія признаются неумѣстными отвлеченность и строго дедуктивные методы изложенія; наглядность, въ нѣкоторыхъ случаяхъ непосредственному усмотрѣнію и эксперименту (лабораторный методъ) отводится видное мѣсто. Изъ этого же требованія вытекаетъ желательность концентрическаго расположенія матеріала въ общемъ планѣ курса математики средней школы — при этомъ въ послѣднемъ концентрѣ найдеть себя

мѣсто и логическій элементъ съ болѣе или менѣе строгимъ обоснованіемъ курса.

2) Содержаніе курса математики должно быть обновлено, какъ въ соотвѣтствіи съ современными содержаніемъ науки, такъ и въ соотвѣтствіи съ требованіями жизни и практическихъ приложений, поэтому и въ курсѣ алгебры должны занять подобающее мѣсто *идея переменнаго числа, понятие о функціи и изученіе процесса измѣненія простѣйшихъ алгебраическихъ функцій* — причемъ трибическому методу изображенія функціональной зависимости должно быть дано широкое развитіе.

3) Различныя отдѣлы школьнаго курса математики должны быть по возможности сближены другъ съ другомъ. То же самое желательнѣе по отношенію къ курсу математики, съ одной стороны и къ курсамъ: физики, космографіи, химіи, естествознанія, статистики — съ другой стороны.

Въ предлагаемомъ обзорѣ учебной литературы по алгебрѣ мы будемъ различать двѣ группы учебныхъ руководствъ: 1) тѣ руководства, на которыхъ не отразилось вышеуказанное направленіе, 2) тѣ руководства, авторы которыхъ въ той или другой степени считались съ этимъ направленіемъ — будемъ въ дальнѣйшемъ называть его «реформистское» направленіе.

1-ая группа руководствъ. Представителями этой группы мы считаемъ учебники: Давидова, Пражевальскаго, Шапошникова и Киселева (въ первыхъ двадцати двухъ изданіяхъ).

Учебникъ Давидова долгое время являлся наиболѣе распространеннымъ въ нашей средней школѣ руководствомъ и слылъ хорошо въѣмъ наизусть. Въ сѣбѣ имѣлъ его *учебники Киселева* мы видимъ стремленіе въ болѣе высокой степени удовлетворить современнымъ научнымъ требованіямъ въ смыслѣ общности и строгости изложенія нѣкоторыхъ вопросовъ — изложенію этихъ вопросовъ (напр. вопросъ объ отрицательныхъ числахъ) приданъ *формальный* характеръ — въ духѣ изложенія Бергмана. Считаемъ необходимымъ оговориться, что мы въ настоящемъ докладѣ не имѣемъ въ виду разсмотрѣнія вопроса, насколько такое изложеніе умѣстно въ курсѣ средней школы

и насколько это изложеніе удачно проведено въ курсѣ А. И. Киселева съ научной и логической точки зрѣнія.

Въ учебникѣ алгебры П. А. Шапошникова (проф. Московскаго Императорскаго Техническаго Училища), авторъ тоже имѣетъ въ виду дать болѣе или менѣе строгое изложеніе курса, но при этомъ, кромѣ формальныхъ доказательствъ при изложеніи вопроса, онъ обращается къ болѣе глубокому, нечерпывающему разсмотрѣнію, какъ самого вопроса по существу, такъ и способа доказательства. Въ этомъ отношеніи заслуживаютъ вниманія преподаватели, напримѣръ, слѣдующія статьи: понятіе объ алгебраическомъ количествѣ (числа абсолютныя и относительныя), выраженія положительныя и отрицательныя (по формѣ), особый случай умноженія двучленовъ (обращено вниманіе на способъ доказательства—методъ математической индукціи); особый случай дѣленія многочлена на двучленъ (обращено вниманіе на способъ доказательства—дедукція); общая теорія равенства (статья о равносильности уравненій); ирраціональныя числа; уравненія высшихъ степеней; общая теорія логарифмовъ (дается понятіе о перемѣнномъ числѣ, функціи и непрерывности). Кромѣ того, укажемъ еще на тѣ статьи, которыя приведены въ учебникѣ, но не входятъ въ составъ официальныхъ программъ: способъ неопредѣленныхъ коэффициентовъ, наибольшія и наименьшія значенія грехиса второй степени, общія теоремы о рядахъ, распространеніе формулы бинома Ньютона, предѣлы лѣкноторыхъ показателныхъ выраженій (число e), разложеніе показательной функціи и логарифма въ ряды.

Мы и здѣсь не будемъ входить въ разсмотрѣніе достоинствъ и недостатковъ въ постановкѣ и изложеніи различныхъ отдѣловъ курса П. А. Шапошникова, отмѣтимъ лишь, что во многихъ вопросахъ требованія дѣйствительнаго логическаго обоснованія и доказательства не удовлетворены, при отсутствіи въ то же время достаточной конкретизаціи. Обратно, напримѣръ, вниманіе на статью объ ирраціональныхъ числахъ авторъ, опредѣливъ несоизмѣримое число, какъ такое, «которое не можетъ быть точно выражено ни въ единицахъ, ни въ какихъ доляхъ единицы», приводитъ статью: «вычисленіе ирра-

циональных чисел» и затѣмъ говорить: «разсужденія о вычисленіи ирраціональных чиселъ устанавливають особыя взгляды на эти числа, какъ на неизмѣнимые предѣлы, къ которымъ бесконечно приближаются перемѣняющіяся сопоставляемые числа соответствующихъ видовъ». Войдя далѣе въ болѣе или менѣе подробное разсмотрѣніе понятія о предѣлѣ перемѣняющагося числа, авторъ устанавливаетъ дѣйствія надъ ирраціональными числами, исходя изъ теоріи предѣловъ. Такое изложеніе не проса не выдерживаетъ критики съ логической точки зрѣнія, гдѣ для того, чтобы имѣть право утверждать: ирраціональное число A есть предѣлъ перемѣняющагося рациональнаго x , не имѣть возможности показывать, что $(A - x)$ можетъ быть сдѣлано какъ угодно мало; следовательно, понятіе о разности A должно предшествовать утвержденію: $A = \text{пред. } (x)$, а не наоборотъ.

Курсъ элементарной алгебры Пржевальскаго по общему характеру курса довольно близокъ къ курсу Шапошникова, содержитъ въ себѣ значительное количество упражненій приложеній.

II-я группа учебниковъ. Къ этой группѣ мы относимъ руководства: Глаголева, Лебединцева, Левитуса и Киселева въ двѣдцать третьемъ изданіи, вмѣстѣ съ дополняющей статью «Графическое изображеніе нѣкоторыхъ функций, рассматриваемыхъ въ элементарной алгебрѣ» — эта статья издана отдѣльной брошюрой въ 60 страницъ.

Во этихъ руководствахъ, какъ мы сказали, читатель найдетъ отраженіе тѣхъ взглядовъ на содержаніе и методъ изложенія школьнаго курса алгебры, которые мы выше назвали «реформистскими». Обращаясь къ краткой характеристикѣ каждаго изъ перечисленныхъ учебниковъ, мы укажемъ, въ какой степени указанные взгляды на данный учебникъ отразились, какая изъ сторонъ реформистскаго направленія получила въ немъ наибольшее развитіе, и вліяніе какихъ иностранныхъ авторовъ на немъ наиболѣе сказалось — если такое мѣсто имѣло мѣсто.

1) *Глаголевъ*. Элементарная алгебра; части I и II. Разнообразный, обширный матеріалъ, изложенный

восьмистахъ страницъхъ. Отличительная черта—авторъ включилъ въ свой курсъ всѣ тѣ вопросы, которые признаются необходимыми въ курсѣ съ точки зрѣнія реформистовъ, изложилъ ихъ достаточно полно и обоснованно и въ то же время не поступился ни одной изъ статей традиціоннаго курса алгебры, разработавъ изложеніе нѣкоторыхъ изъ нихъ нѣсколько иначе, чѣмъ это обычно дѣлалось. Изложеніе теорій сопровождается многочисленными примѣрами и задачами, представляющими интересъ, какъ въ смыслѣ освѣщенія и усвоенія теоретическихъ вопросовъ, такъ и въ смыслѣ практическихъ приложений.

Чтобы дать понятіе о содержаніи и характерѣ этого курса, отмѣтимъ слѣдующее:

1) Статя: «алгебраическія числа» начинается съ разсмотрѣнія направленныхъ отрезковъ и изъ этого разсмотрѣнія устанавливается понятіе объ отрицательномъ числѣ. Опредѣливъ дѣйствія надъ новыми числами, авторъ обращаетъ вниманіе, что согласно сдѣланнымъ опредѣленіямъ этихъ дѣйствій соблюдается принципъ постоянства формальныхъ законовъ операций (въ общемъ видѣ этого принципа не формулировалъ).

2) Авторъ даетъ формальное опредѣленіе умноженія алгебраическихъ чиселъ, но прежде чѣмъ дать это опредѣленіе рассматриваетъ задачу объ опредѣленіи разстоянія, пройденнаго точкой при равномерномъ движеніи при условіи, что скорость и промежутки времени принимаютъ и положительные и отрицательныя значенія.

3) Въ статьѣ «приложенія ученія объ алгебраическихъ числахъ» дается теорема Шалля-Мебіуса. Замѣтимъ, что эта теорема является дѣйствительно необходимой для достаточно обоснованнаго изложенія нѣкоторыхъ вопросовъ тригонометріи и аналитической геометріи.

4) Понятіе о функціи дается вслѣдъ за изложеніемъ вопроса о дѣйствіяхъ надъ многочленами и алгебраическими дробями.

Послѣ этого авторъ сейчасъ же знакомитъ учащихся съ нѣкоторыми свойствами цѣлой алгебраической функціи.

5) Передъ статьей объ уравненіяхъ дана статья «особыя формы числовыхъ значеній алгебраическихъ выраженій»
 $\left(\frac{m}{o}, \frac{o}{m}, \frac{m}{\infty}, \frac{\infty}{m}, \frac{o}{o}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, o \cdot \infty \right)$.

6) Вопросъ объ ирраціональныхъ числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними изложенъ по Дедекунду. Установивъ понятіе о «сѣченіи» раціональныхъ чиселъ на два класса, авторъ даетъ слѣдующее опредѣленіе: «ирраціональное число есть та черта (?) или правило (?), которое раздѣляетъ всѣ раціональныя числа на двѣ группы, опредѣляющія это число».

7) Послѣ статьи о рѣшеніи уравненій дано изслѣдованіе свойствъ квадратнаго и биквадратнаго трехчленовъ, и затѣмъ уже авторъ знакомитъ учащихся съ графическимъ изображеніемъ алгебраическихъ функцій.

Въ вопросѣ о графикахъ въ средней школѣ различные авторы держатся различныхъ взглядовъ на взаимоотношеніе между этимъ вопросомъ и элементами аналитической геометріи. Глаголемъ по этому поводу высказывается слѣдующимъ образомъ: «простѣйшій пріемъ изслѣдованія различныхъ алгебраическихъ выраженій состоитъ въ воплощеніи алгебраическихъ выраженій въ геометрическіе образы и изслѣдованіи послѣднихъ. Средства для такого геометрическаго представленія даютъ аналитическая геометрія, съ простѣйшими элементами которой прежде всего и необходимо познакомиться».

Согласно этому взгляду, авторъ и предваряетъ статью «графика измѣненія алгебраическихъ функцій» изложеніемъ элементовъ аналитической геометріи (понятіе о координатахъ точки, разстояніе между двумя точками, уравненіе прямой, уравненія: круга, эллипса, гиперболы и параболы). Изложенію этихъ элементовъ аналитической геометріи посвящено двадцать двѣ страницы.

Въ статьѣ «графика измѣненія алгебраическихъ функцій» авторъ даетъ: 1) построеніе графики линейной функцій и изученіе процесса измѣненія этой функцій; въ связи съ этимъ изученіемъ даны изслѣдованія уравненія 1-ой степени и системы двухъ уравненій 1-ой степени, вмѣстѣ съ графическими интер-

превращеніи этихъ изслѣдованій; 2) графическое представленіе измѣненія трехчлена второй степени и примѣры построения различныхъ кривыхъ, заданныхъ сравнительно сложными уравненіями — напр.: $y = \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$, $y = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 - 5x + 4}$ и т. п.

8) Въ изложеніи статьи о логарифмахъ авторъ отступаетъ отъ обычно принятаго въ нашихъ руководствахъ опредѣленія логарифма, какъ показателя степени, устанавливая понятіе о логарифмѣ какъ разсмотрѣніи двухъ прогрессій — геометрической и арифметической, первые члены которыхъ соответственно суть 1 и 0. При такой постановкѣ вопроса автору удается выяснить ученикамъ значеніе Писеровой системы логарифмовъ.

9) Дано гораздо болѣе подробное, сравнительно съ другими учебниками, изложеніе вопросовъ о сложных процентахъ, учетѣ и рентахъ.

10) Въ курсѣ дается понятіе объ исчисленіи вероятностей и приложенія этого исчисления къ рѣшенію практическихъ вопросовъ, напр., страхованіе капитала на случай смерти, пожизненная рента.

11) Статьи: непрерывныя дроби, неопредѣленные уравненія, теорія соединеній, биномъ Ньютона, комплексныя числа подробно и обстоятельно изложены въ разсматриваемомъ курсѣ.

12) Дана дополнительная статья въ объемѣ ста страницъ, имѣющая цѣлью дать болѣе строгое обоснованіе изученію процесса измѣненія функций введеніемъ элементовъ анализа безконечно-малыхъ. Содержаніе этой статьи составляютъ слѣдующіе вопросы: 1) предѣлы (20 стр.); 2) непрерывность функций (7 стр.) 3) производныя простѣйшихъ функций (16 стр.); 4) приложеніе производныхъ къ изслѣдованію измѣненія функций (57 стр.).

Полагаемъ, что приведеннымъ нами самымъ краткимъ обзоромъ содержанія курса Глаголева оправдывается данное выше указаніе на разнообразіе и обширность матеріала этого курса. «Реформистскіе» взгляды отразились въ этомъ курсѣ главнымъ образомъ на введеніи новыхъ статей (элементы ученія о функцияхъ), но нельзя сказать, чтобы эти статьи были

связаны въ одно цѣлое съ остальными статьями курса. нельзя сказать, чтобы трудъ Глаголова представлялъ собою опять планомѣрно разработанный, выдержанный въ опредѣленномъ направленіи элементарнаго курса алгебры для средней школы. Вліяніе французскихъ авторовъ замѣтно отразилось на многихъ статьяхъ курса—особенно замѣтно вліяніе курса Бурле.

К. О. Лебединцевъ Курсъ алгебры для среднихъ учебныхъ заведеній

Курсъ состоитъ изъ 2-хъ частей въ объемѣ 580 страницъ: первая часть курса вышла уже вторымъ изданіемъ.

Въ предисловіи къ 1-му изданію первой части курса авторъ обращаетъ вниманіе на слѣдующее: «содержаніе курса построено такъ, чтобы онъ представлялъ изъ себя параллельное развитіе двухъ основныхъ идей—понятія о числѣ и понятія о функциональной зависимости». Развивая далѣе въ томъ же предисловіи взгляды на содержаніе и методъ изложенія элементарнаго курса алгебры, авторъ ссылается на Клейна, Бореля, а также и на автора экспериментальной дидактики Дайя (взглядъ на сущность процесса отвлеченія).

Содержаніе курса: въ тѣ статьи, которыя обычно, въ соответствии съ официальными программами, составляютъ содержаніе школьнаго курса алгебры и, кромѣ того, слѣдующія дополненія: 1) вслѣдъ за ученіемъ объ уравненіяхъ и неравенствахъ 1-ой степени авторъ излагаетъ статью, функціи перваго порядка и ихъ наглядное изображеніе. Равнымъ образомъ за статьей о квадратныхъ уравненіяхъ помещена статья: функціи втораго порядка отъ одного независимаго переменнаго и ихъ наглядное изображеніе; 2) основы ученія о предѣлахъ въ связи съ понятіемъ о производной функціи; 3) основы ученія о мнимыхъ и комплексныхъ числахъ.

Относительно общаго характера изложенія и разработки отдѣльныхъ статей курса отмѣтимъ слѣдующее:

1) Авторъ, какъ это можно видѣть изъ предисловія, желалъ бы избѣжать абстрактно-дедуктивнаго метода положе

нія, противопоставляя этому методу методъ конкретно-индуктивный.

Исходя изъ этой точки зрѣнія авторъ предполагаетъ строить теорію отрицательныхъ чиселъ, а затѣмъ и несоизмѣримыхъ чиселъ на фундаментѣ конкретныхъ примѣровъ.

Что касается до построения теоріи отрицательныхъ чиселъ, мы должны замѣтить, что по существу авторъ въ своемъ изложеніи стоитъ на формальной точкѣ зрѣнія; толкованіе же умноженія и дѣленія отрицательныхъ чиселъ на приведенныхъ авторомъ конкретныхъ задачахъ вызываетъ сомнѣніе въ его приемлемости, какъ съ логической, такъ и съ дидактической точки зрѣнія.

2) Въ изложеніи статьи о несоизмѣримыхъ числахъ авторъ сдѣлалъ попытку дать въ школьномъ курсѣ алгебры болѣе или менѣе исчерпывающую вопросъ и логически обоснованную теорію несоизмѣримаго числа.

Отличительной особенностью изложенія этой статьи слѣдуетъ признать стремленіе автора методически подойти къ различнымъ моментамъ излагаемой теоріи; съ этой цѣлью авторъ начинаетъ съ частнаго примѣра ($\sqrt{2}$) и постепенно подводитъ учащагося къ общему понятію о несоизмѣримомъ числѣ; при этомъ авторъ постоянно имѣетъ въ виду конкретизацію вопроса, прибѣгая къ толкованію отвѣченныхъ понятій на отрѣзкахъ прямой.

Чтобы дать представленіе о томъ, какимъ образомъ авторъ въ концѣ концовъ устанавливаетъ понятіе о несоизмѣримомъ числѣ, приведемъ данное авторомъ опредѣленіе: «мы будемъ вообще называть несоизмѣримымъ числомъ такое (?), которое по опредѣленію своему будетъ болѣе любого соизмѣримаго числа, входящаго въ группу чиселъ, опредѣленныхъ какимъ-нибудь условіемъ, и менѣе любого соизмѣримаго числа, не входящаго въ эту группу, причемъ группы эти обладаютъ свойствомъ, что въ первой изъ нихъ нѣтъ наибольшаго числа, а во второй нѣтъ наименьшаго».

Дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами авторъ устанавливаетъ, пользуясь слѣдующей теоремой: «если имѣемъ два

переменных числа k и l , изменяющихся по какому угодно закону, но такъ что:

1) все значенія ихъ положительны и всякое значеніе меньше всякаго значенія l ;

2) разность соответствующихъ значеній l и k может сдѣлаться и оставаться меньше любого напередъ заданнаго положительнаго числа, то существуетъ такое число x , и только одно, которое удовлетворяетъ неравенству $k < x < l$ при всякихъ соответствующихъ значеніяхъ k и l . Переменные числа k и l авторъ называетъ переменными границами, опредѣляющими число x .

3) Въ изложеніи статей объ алгебраическихъ преобразованіяхъ и уравненіяхъ не замѣчается осуществленія какъ бы новыхъ взглядовъ на содержаніе и характеръ изложеніи этихъ статей.

4) Понятіе о переменномъ числѣ и функциональной зависимости впервые появляется въ концѣ первой части курса въ статьѣ: функціи перваго порядка и ихъ наглядное изображеніе. Статья эта начинается ознакомленіемъ учащихся съ элементами аналитической геометріи—дано довольно подробно изученіе уравненія прямой и тутъ же дано наглядное изображеніе рѣшенія уравненія первой степени и рѣшенія системы двухъ уравненій. Такимъ образомъ, геометрическая интерпретація рѣшенія и изслѣдованія уравненій ведется не параллельно съ изученіемъ самого рѣшенія и изслѣдованія, а отдѣльно отъ изученія этихъ вопросовъ. Равнымъ образомъ не установленъ непосредственной связи между рѣшеніемъ и изслѣдованіемъ уравненія второй степени съ одной стороны и изученіемъ функціи 2-й степени и ея графика—съ другой. После построенія графика функція: $y = ax^2 + bx + c$ устанавливаются геометрическія свойства построенной кривой (фокусъ и директриса параболы). Вслѣдъ за изслѣдованіемъ цѣлой функціи 2-ой степени дается изслѣдованіе дробной функціи вида $y = \frac{ax+b}{a_1x+b_1}$, и затѣмъ также устанавливаются геометрическія свойства кривой, заданной вышенаписаннымъ уравненіемъ (центръ, оси симметріи, фокусы и асимптоты гиперболы

Всѣ указанныя статьи, относящіяся къ изученію свойствъ простѣйшихъ функцій, изложены внѣ зависимости отъ теорій предѣловъ и понятія о производной функціи. Теорію предѣловъ и ученіе о производной, вмѣстѣ съ примѣненіемъ производной функціи къ изслѣдованію свойствъ первообразной, авторъ даетъ въ VIII-мъ отдѣлѣ второй части курса—этотъ отдѣлъ можетъ быть рассматриваемъ въ видѣ дополнительной къ курсу статьи; въ этой статьѣ авторъ даетъ, между прочимъ, «примѣненіе теоріи предѣловъ къ выводу формулы длины окружности и площади круга».

5) Статьѣ о логарифмахъ предшествуетъ изученіе показательной функціи и ея графика. Изученіе логарифма иллюстрируется построеніемъ графика логарифмической функціи.

Благодаря тому, что авторъ далъ въ своемъ курсѣ теорію ирраціональнаго числа, явилась возможность въ нѣкоторыхъ вопросахъ статьи о показательной функціи и логарифмахъ говорить болѣе обоснованно.

Заканчивая разсмотрѣніе курса Лебединцева, укажемъ, что и въ этомъ курсѣ такъ же, какъ и въ курсѣ Глаголеца, вліяніе «реформистскаго» направленія сказалось главнымъ образомъ на введеніи въ курсъ новыхъ статей (изученіе простѣйшихъ алгебраическихъ функцій и ихъ графикъ) и оно сравнительно мало сказалось на общей конструкціи курса. Введеніе новыхъ статей и болѣе широкое развитіе нѣкоторыхъ изъ тѣхъ статей, которыя обычно входятъ въ составъ курса элементарной алгебры (напр., статья объ ирраціональномъ числѣ), повело къ весьма значительному, сравнительно, объему курса (579 страницъ). Въ изложеніи статей, относящихся къ вопросу объ изученіи простѣйшихъ алгебраическихъ функцій, наиболѣе замѣтно отразилось вліяніе Бореля.

Д. Левитусъ. Курсъ элементарной алгебры для среднихъ учебныхъ заведеній, ч. I и II.

Трудъ Левитуса еще не законченъ—мы имѣемъ лишь первыя двѣ части курса, содержаніе которыхъ составляютъ слѣдующія статьи:

I-я часть—ученіе объ алгебраическихъ обозначеніяхъ и преобразованіяхъ въ предѣлахъ четырехъ основныхъ дѣйствій

и рѣшеніе численныхъ уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

2-я часть—ученіе о преобразованіяхъ дробныхъ выраженій, рѣшеніе уравненій первой степени съ однимъ и многими неизвѣстными и графическій методъ изслѣдованія въ примѣненіи къ задачамъ первой степени.

Отмѣтимъ слѣдующія наиболее характерныя черты содержанія, конструкціи и методъ изложенія этого курса:

1) Авторъ имѣетъ въ виду дать концентрическое расположеніе матеріала своего курса — такъ, напримѣръ: указать въ § 4 второй части отличіе алгебраической дроби отъ арифметической и напомнивъ учащимся основное свойство арифметической дроби, авторъ говоритъ: «въ *последней части нашего курса* приведено доказательство того, что и въ этомъ случаѣ (въ случаѣ алгебраической дроби) основное свойство дроби остается въ силѣ. *Пока же* примемъ безъ доказательства, что числитель и знаменатель алгебраической дроби можно умножить или раздѣлить на одно и то же число; отъ этого величина дроби не измѣнится», да и въ расположеніи матеріала, составляющаго содержаніе первыхъ двухъ частей курса, можно отмѣтить осуществленіе принципа концентрическаго расположенія этого матеріала—различныя вопросы курса постоянно переплетаются между собой: ученіе объ алгебраическихъ преобразованіяхъ и рѣшеніе уравненій изложены не въ видѣ отдѣльныхъ статей, болѣе или менѣе исчерпывающихъ содержаніе вопроса — нѣтъ, эти вопросы излагаются параллельно другъ другу; на первыхъ же страницахъ авторъ знакомитъ учащихся съ составленіемъ и рѣшеніемъ самыхъ простыхъ уравненій, усложняя ихъ дальше по мѣрѣ накопленія фактическаго матеріала въ области формальныхъ преобразованій.

2) Изученіе алгебраическихъ преобразованій проводится весьма постепенно, при этомъ авторъ очень мало заботится о *доказательности*. Путемъ нѣкоторыхъ разъясненій, а главнымъ образомъ, путемъ рѣшенія различныхъ примѣровъ, въ большомъ количествѣ сопровождающихъ изложеніе статей учебника, онъ старается научить учениковъ техники алгебраическихъ преобразованій.

Равнымъ образомъ, въ этомъ концентрѣ не дается никакой теоріи уравненій—авторъ на примѣрахъ знакомитъ учениковъ съ различными приемами рѣшенія уравненій.

3) Въ статьѣ «положительныя и отрицательныя числа» авторъ, указавъ на невозможность вычитанія въ томъ случаѣ, когда уменьшаемое меньше вычитаемого, далѣе говоритъ: «Въ алгебрѣ разсматриваются числа особаго рода, называемыя отрицательными. Они обладаютъ (?) тѣмъ свойствомъ, что отъ ихъ прибавленія получается меньше, чѣмъ было раньше. Такія числа отмѣчаются знакомъ минусъ передъ ними. Такъ, напр., -3 обозначаетъ число, отъ прибавленія котораго то, что было, уменьшится на 3». Послѣ сдѣланнаго, весьма кратко, замѣчанія о томъ, что будто бы «нѣтъ ничего страннаго въ томъ, что въ алгебрѣ разсматриваются такія особенныя числа», авторъ безъ всякихъ опредѣленій, обоснованій на чемъ бы то ни было, даетъ правила сложенія и вычитанія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, выводя ихъ изъ разсмотрѣнія слѣдующихъ четырехъ примѣровъ: 1) $(+3) + (+5)$; 2) $(-3) + (-5)$; 3) $(+3) + (-5)$; 4) $(+7) + (-4)$.

Приведемъ для характеристики разъясненіе, сопровождающее рѣшеніе одного изъ этихъ примѣровъ:

«Сложить $+3$ и -5 . Число -5 состоитъ изъ пяти отрицательныхъ единицъ; три изъ нихъ взаимно уничтожаются съ тремя положительными единицами, содержащимися въ числѣ $+3$, и въ суммѣ останутся только двѣ отрицательныя единицы.

Итакъ, $(+3) + (-5) = -2$.

Опредѣленіе умноженія и дѣленія отрицательныхъ дано не непосредственно вслѣдъ за сложеніемъ и вычитаніемъ, а значительно позже.

Къ геометрическимъ интерпретаціямъ понятія объ отрицательныхъ числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними авторъ совершенно не прибѣгаетъ и, видимо, не случайно, такъ какъ въ изложеніи нѣкоторыхъ другихъ вопросовъ авторъ пользуется ихъ геометрическимъ толкованіемъ.

4) Послѣднія пять главъ изъ тринадцати, составляющихъ вторую часть курса, посвящены вопросамъ, связаннымъ съ по-

нтіємъ о функціональной зависимости. Содержаніе этихъ главъ слѣдующее: 1) общія понятія о функціональной зависимости и о графикахъ функцій; 2) прямая пропорціональности; 3) линейная функція; 4) примѣненіе графическаго метода рѣшенію различныхъ задачъ; 5) особенные случаи системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

При изложеніи этого отдѣла авторъ не считаетъ нужнымъ давать какинъ-либо предварительныя свѣдѣнія изъ аналитической геометріи; для него графикъ интересенъ лишь какъ наглядное изображеніе той или другой функціональной зависимости, геометрическія свойства полученной кривой совершенно игнорируются.

Ознакомленіе съ построеніемъ графика проводится методически, останавливая вниманіе учащихся на различныхъ моментахъ этого построенія; при этомъ затрачиваются вопросы непрерывности и интерполированія.

Трудно, конечно, дать общую характеристику труда г. Левитуса, вслѣдствіе того, что трудъ этотъ еще не законченъ, однако же, и теперь уже можно сказать, что на почвѣ взглядовъ автора «реформистскіе взгляды отразились въ слѣдующемъ: 1) введеніе въ курсъ новыхъ статей (изученіе функцій и ихъ графикъ), 2) принципъ концентрическаго расположенія матеріала, съ примѣненіемъ въ каждомъ концентрическомъ отдѣлѣ отвѣтствующаго метода изложенія.

По поводу концентрическаго расположенія матеріала въ связи съ рассмотрѣніемъ труда г. Левитуса, можно смѣло умѣстнымъ высказать слѣдующее: мы не можемъ указать въ иностранной литературѣ, по предмету алгебры учебника, въ которомъ былъ бы выдержанъ принципъ концентрическаго расположенія матеріала, но, напримѣръ, во французской средней школѣ въ различныхъ классахъ примѣняютъ спеціально для этихъ классовъ составленные, учебники однихъ и того же или различныхъ авторовъ; русскіе же авторы, соотвѣтствуя съ официальными программами и школьной практикой, обыкновенно составляютъ учебникъ по данному предмету для примѣненія его во всѣхъ классахъ и, часто, въ учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ типовъ — многіе недочеты нашихъ

современныхъ учебниковъ и въ дидактическомъ и въ научномъ отношеніяхъ при этомъ являются совершенно необходимыми.

А. Киселевъ. Элементарная алгебра; изданіе двадцать третье (переработанное).

Ею же. Графическое изображеніе нѣкоторыхъ функцій, разсматриваемыхъ въ элементарной алгебрѣ. Пособіе для кадетскихъ корпусовъ и другихъ учебныхъ заведеній.

Въ разсматриваемомъ изданіи курса элементарной алгебры авторъ далъ изложеніе статей объ отрицательныхъ числахъ и о числахъ несоизмѣримыхъ совершенно отличное отъ того, которое имѣло мѣсто въ предыдущихъ изданіяхъ его учебника.

Понятіе объ алгебраическихъ числахъ устанавливается изъ разсмотрѣнія конкретныхъ величинъ, «имѣющихъ направленіе».

Изъ разсмотрѣнія сложенія направленныхъ отрѣзковъ устанавливается понятіе о суммѣ алгебраическихъ чиселъ и указывается, что сложеніе этихъ чиселъ подчиняется законамъ: перемѣстительному и сочетательному. Умноженіе алгебраическихъ чиселъ опредѣляется формально съ соответствующими разъясненіями; указывается, что законы: перемѣстительный, сочетательный и распределительный имѣютъ мѣсто и въ случаѣ умноженія алгебраическихъ чиселъ; мелкимъ шрифтомъ дано толкованіе смысла умноженія этихъ чиселъ на конкретной задачѣ.

Ученіе о несоизмѣримыхъ числахъ дано въ двухъ различныхъ изложеніяхъ — одно изложеніе дано въ текстѣ учебника и проведено соответственно среднимъ классамъ гимназій, другое изложеніе дано въ приложеніи къ курсу, въ немъ достаточно строго и подробно проведена теорія несоизмѣримыхъ чиселъ по Дедекенду.

Конструкція статьи о несоизмѣримомъ числѣ, приведенной въ текстѣ учебника, въ общихъ чертахъ такова: 1) разсматривается измѣреніе прямолинейнаго отрѣзка и, въ случаѣ его несоизмѣримости съ выбранной единицей, указывается на невозможность полученія «точного результата при измѣреніи» — «но тогда мы можемъ», говоритъ авторъ, «находить прибли-

женные результаты измѣренія (?) и притомъ съ какою угодно точностью».

2) Устанавливается соотвѣтствіе между числами и точками прямой, указывается, что не всякой точкѣ, взятой на «числовой прямой», соотвѣтствуетъ нѣкоторое число и затѣмъ создается понятіе о несоизмѣримомъ числѣ слѣдующимъ образомъ: «допускають, что при данной единицѣ длины *каждой* точкѣ *B* числовой прямой соотвѣтствуетъ определенное число принимаемое за мѣру того отрѣзка *AB*, концомъ котораго служитъ эта точка *B*. Если отрѣзокъ *AB* соизмѣримъ съ единицей длины, то точкѣ *B* соотвѣтствуетъ соизмѣримое число; если же онъ несоизмѣримъ съ единицей длины, то точкѣ *B* соотвѣтствуетъ нѣкоторое несоизмѣримое число, которое нельзя выразить цифрами (?), но можно обозначить какимъ-ни будь знакомъ, напримеръ, одной изъ буквъ греческаго алфавита: $\alpha, \beta, \gamma \dots$ ».

Приблизительный результатъ измѣренія несоизмѣримаго отрѣзка съ точн. до $\frac{1}{n}$ (это понятіе установлено ранѣе при разсмотрѣніи процесса измѣренія), которому мѣрою служитъ несоизмѣримое число α , авторъ называетъ *приближеннымъ значеніемъ числа α съ точностью до $\frac{1}{n}$* и затѣмъ ставитъ *целое* *сис.* согласно которому несоизмѣримое число α больше всякаго изъ приближенныхъ значеній съ недостаткомъ и меньше всякаго изъ приближенныхъ значеній съ избыткомъ.

3) Установивъ понятіе о равенствѣ и неравенствѣ несоизмѣримыхъ чиселъ, авторъ переходитъ затѣмъ къ опредѣленію дѣйствій надъ несоизмѣримыми числами. Приведемъ, въ видѣ примѣра, данное авторомъ опредѣленіе сложения: «сложить числа $\alpha, \beta, \gamma \dots$ значитъ найти число, большее каждой суммы $\alpha + \beta + \gamma + \dots$ и меньше каждой суммы $A + B + C + \dots$, гдѣ подъ $\alpha, \beta, \gamma \dots$ разумѣются *какія угодно* приближенные значенія чиселъ $\alpha, \beta, \gamma \dots$, взятыхъ съ недостаткомъ, а подъ $A, B, C \dots$ *какія угодно* приближенные значенія тѣхъ же чиселъ, взятыхъ съ избыткомъ». Доказательства существованія искомаго числа не приводятся. Опредѣленіе поясняется на примѣрѣ.

Разсматриваемая нами въ связи съ этимъ курсомъ брошюра того же автора: «Графическое изображеніе нѣкоторыхъ функцій, разсматриваемыхъ въ элементарной алгебрѣ» содержитъ слѣдующія статьи: 1) общее понятіе о функціи и ея графическомъ изображеніи; 2) графическое изображеніе двучлена 1-й степени, измѣненіе двучлена 1-й степени, графическое изображеніе системы двухъ уравненій 1-й степени; 3) графическое изображеніе трехчлена 2-й степени, измѣненіе трехчлена 2-й степени, графическій способъ рѣшенія квадратнаго уравненія; 4) графическое изображеніе функцій показательной и логарифмической; 5) упражненія. Относительно изложенія этихъ статей отмѣтимъ слѣдующее:

1) Вопросъ о непрерывности функцій не затрагивается.

2) Изученіе двучлена первой степени и его графика проводится постепенно, начиная съ построенія графика функціи $y = ax$ въ случаѣ $a > 0$. При этомъ доказывается, что всѣ точки, у которыхъ абсциссами служатъ значенія x , а ординатами, соответствующія значенія, y лежатъ на одной и той же прямой, проходящей черезъ начало координатъ и обратно: координаты всякой точки построенной прямой удовлетворяютъ уравненію: $y = ax$. Затѣмъ строится графикъ той же функціи для случаевъ: $a < 0$ и $a = 0$.

Далѣе разсматривается измѣненіе положенія прямой въ зависимости отъ измѣненія коэффициента a , при этомъ дается понятіе объ угловомъ коэффициентѣ прямой.

Графикъ функціи: $y = ax + b$, авторъ получаетъ параллельнымъ перенесеніемъ графика: $y = ax$, кромѣ того указывается способъ построенія прямой: $y = ax + b$ по точкамъ пересѣченія этой прямой съ осями координатъ.

Измѣненіе двучлена: $ax + b$ устанавливается непосредственно изъ разсмотрѣнія графика.

3) При изученіи трехчлена второй степени послѣдовательно строятся графики функцій: $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = -ax^2 + c$, $y = a(x + m)^2$ и, наконецъ, $y = ax^2 + k + c$. При этомъ указывается, что всѣ получаемыя кривыя имѣютъ одинъ и тотъ же характеръ. Геометрическихъ свойствъ параболы авторъ не разсматриваетъ.

Въ статьѣ о графикахъ показательной и логарифмической функцій устанавливается связь между этими функціями и ихъ графиками.

Отмѣченныя выше измѣненія, внесенныя г. Киселевымъ въ послѣднее изданіе своего курса, а также составленіе имъ дополнительныхъ къ курсу статей, относящихся къ понятію функціональной зависимости, указываютъ на то, что авторъ этого, наиболѣе распространеннаго въ нашей средней школѣ наиболѣе приспособленнаго къ официальнымъ программамъ курса счелъ необходимымъ, не дожидаясь измѣненія официальныхъ программъ (программа курса алгебры, составленная въ духѣ проведенія идеи функціональной зависимости, введенъ у насъ лишь въ кадетскихъ корпусахъ), считать ся съ тѣмъ новымъ направленіемъ въ преподаваніи математики, которое въ настоящее время привлекаетъ вниманіе педагоговъ и получаетъ въ томъ или иномъ видѣ осуществленіе въ школьныхъ практикахъ и учебной литературѣ различныхъ странъ.

Намъ остается еще указать на *«Курсъ элементарной алгебры составленный по Бертрану, Буле, Таттнери и др.» Н. Вилибина, изданіе пятое, измѣненное.*

Этотъ трудъ не можетъ быть разсматриваемъ въ разсмотрѣнныхъ нами руководствахъ, такъ какъ авторъ ставитъ себѣ задачу иначе, чѣмъ большинство составителей русскихъ учебниковъ по алгебрѣ,—онъ имѣетъ въ виду лишь старшіе классы среднихъ учебныхъ заведеній и по этому поводу говоритъ въ своемъ предисловіи слѣдующее: «Настоящее, пятое изданіе «Курса алгебры» назначается, подобно предыдущимъ изданіямъ, для старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, а не для первоначальнаго изученія алгебры, которое должно вестись, главнымъ образомъ, на примѣрахъ и задачахъ при попутномъ истолкованіи теоретическихъ основъ».

Существеннымъ и интереснымъ отличіемъ пятаго изданія курса Вилибина является выдѣленіе и объединеніе всѣхъ статей школьнаго курса алгебры, которыя носятъ «арифметическій» характеръ и имѣютъ въ виду «расширеніе понятія о числѣ».

Изложеніе этихъ статей и составляетъ содержаніе перваго

книжки курса. Мы въсколко подробнѣе остановимся на разсмотрѣніи этой первой книжки; что же касается до остальныхъ, то ограничимся лишь указаніемъ, что преподаватель найдетъ въ нихъ подробное и строгое изложеніе вопросовъ, обычно относимыхъ къ школьному курсу алгебры. Изложеніе дано въ духѣ большихъ французскихъ курсовъ—самъ авторъ указываетъ на вліяніе на свой трудъ Курса Бурле. «Leçons d'algèbre élémentaire». Дается подробное изслѣдованіе цѣлой функціи второй степени, но къ графикамъ функціи авторъ нигдѣ не прибѣгаетъ.

Обращаясь къ первой книгѣ курса, перечислимъ прежде всего статьи, составившія ея содержаніе: основныя арифметическія понятія, относительныя числа, приложения положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, корни, ирраціональныя числа.

Въ главѣ «основныя арифметическія понятія» авторъ подробно разсматриваетъ свойства суммы, разности, произведенія и частнаго натуральныхъ и дробныхъ чиселъ.

Для ознакомленія съ характеромъ изложенія этой главы укажемъ на конструкцію статьи о сложении. Опредѣленія суммы двухъ чиселъ не дается; основныя свойства суммы постулируются слѣдующими равенствами: $0 + A = A(1)$ и $A + B + C = A + C + B(2)$; изъ этихъ двухъ равенствъ выводится, какъ слѣдствіе: $B + C = C + B$.

Указывается, что равенство (2), допущенное для цѣлыхъ чиселъ, остается справедливымъ и для дробныхъ чиселъ.

Далѣе доказывается теорема: «сумма какаго нѣ есть числа слагаемыхъ не измѣняется отъ перемѣны порядка сложений» и изъ этой теоремы выводятся слѣдствія: 1) «въ суммѣ какія нѣ есть слагаемыя можно замѣнить изъ вычисленной суммой», 2) «для того, чтобы къ числу A прибавить сумму, достаточно прибавить каждое слагаемое послѣдовательно».

Дается опредѣленіе: «говорятъ, что число A болѣе числа B , если оно получено отъ прибавленія къ числу B нѣкотораго числа, отличнаго отъ нуля. Обратнo: говорятъ, что число B менѣе числа A ».

На основаніи этого опредѣленія доказываются слѣдующіе положенія: 1) «если $B > A$ и $C > B$, то $C > A$ », 2) «если двѣ суммы состоятъ изъ одного и того же числа слагаемыхъ, причемъ слагаемыя первой суммы соотвѣтственно болѣе слагаемыхъ второй, то первая сумма болѣе второй».

Глава II-я посвящена изложенію вопроса объ относительныхъ числахъ. Указавъ, что, въ цѣляхъ сохраненія общаго выраженія $A - B$, должно ввести «числа новой природы» авторъ даетъ слѣдующія опредѣленія: 1) «положительнымъ числомъ называется всякое абсолютное число, за исключеніемъ нуля, предшествуемое знакомъ $+$ », 2) «отрицательнымъ числомъ называется всякое абсолютное число, за исключеніемъ нуля, предшествуемое знакомъ $-$ ».

Послѣ этого дается опредѣленіе равенства относительныхъ чиселъ и опредѣленія основныхъ дѣйствій надъ относительными числами.

Обращаемъ вниманіе на доказательство теоремы: «сумма трехъ слагаемыхъ (въ случаѣ относительныхъ чиселъ) не мѣняется отъ перестановки двухъ послѣднихъ» — принявъ авторомъ построене статьи объ относительныхъ числахъ, дѣйствіяхъ надъ ними заставляеть его при доказательствѣ этой теоремы заняться скучнымъ разсмотрѣніемъ восьми отдѣльныхъ случаевъ.

Установивъ дѣйствія надъ относительными числами, авторъ переходитъ къ понятію объ «алгебраической суммѣ». Весьма подробно разсмотрѣвъ соглашенія, лежащія въ основѣ этого понятія, авторъ далѣе приводитъ цѣлый рядъ теоремъ, устанавливающихъ свойства алгебраической суммы.

Въ главѣ III-ей, «приложенія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ» дается подробное разсмотрѣніе направленныхъ отрезковъ и устанавливается соотвѣтствіе между этими отрезками и точками на нѣкоторой оси, съ одной стороны относительными числами—съ другой. Между прочимъ, дана теорема Шаля-Мёбіуса. Кромѣ того, понятіе объ относительныхъ числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними конкретизируется разсмотрѣніемъ направленныхъ промежутковъ времени и задачею на равномерное движеніе.

Конструкція изложенія статті обь ирраціональних числахъ въ общихъ чертахъ такова:

Въ главѣ IV, «корни», дається понятіе о корняхъ абсолютнаго числа съ точністю до единицы и вообще съ точністю до h — при этомъ замѣтимъ, что опредѣленіе этихъ понятій никакой логической погрѣшности не заключають.

Доказавъ теорему: «Разности между числомъ A и r -овыми степенями его r -овыхъ корней, съ точністю до h , съ недостаткомъ и съ избыткомъ, суть, при достаточно маломъ значеніи h , числа, меньшія напередъ заданнаго числа α , и, при уменьшеніи этого значенія h , продолжаютъ быть менѣе этого числа α », авторъ дасть затѣмъ слѣдующее опредѣленіе: «говорять, что число A , въ случаѣ несуществованія r -оваго раціональнаго корня этого числа, имѣетъ ирраціональный r -овый корень, который обозначается символомъ: $\sqrt[r]{A}$ » и далѣе, послѣ нѣкоторыхъ поясненій, говорить: «Итакъ, если $\alpha' < A < \alpha''$, то, по опредѣленію символа $\sqrt[r]{A}$, можемъ писать: $\alpha < \sqrt[r]{A} < \alpha'$ ».

Затѣмъ дається обращеніе ирраціональнаго корня въ десятичную дробь и доказываются, что получаемая при этомъ обращеніи безконечная десятичная дробь не есть періодическая.

Въ главѣ V-ой, «Ирраціональные числа», устанавливается общее понятіе обь ирраціональномъ (несоизмѣримомъ числѣ) и излагается, достаточно исчерпывающая вопросъ, теорія этого числа.

Понятіе обь ирраціональномъ числѣ устанавливается изъ разсмотрѣнія «разрѣза» (сѣченія) всѣхъ раціональных чиселъ на двѣ совокупности—такимъ образомъ авторъ становится на точку зрѣнія Дедекнда.

Замѣтимъ, что въ трудѣ того же автора «Основанія анализа безконечно-малыхъ» дано изложеніе статті обь ирраціональномъ числѣ, ближе примыкающее къ теоріи Мере-Кантора.

Вліяніе этой теоріи, въ разсматриваемомъ курсѣ, отразилось до нѣкоторой степени въ статѣ «Послѣдовательности»,

составляющей одинъ изъ параграфовъ главы объ ирраціональномъ числѣ.

Въ этой статьѣ авторъ доказываетъ, что двумя послѣдовательностями чиселъ, удовлетворяющими нѣкоторымъ опредѣленнымъ условіямъ, опредѣляется одно и только одно раціональное и ирраціональное число. Какъ примѣръ такого опредѣленія числа, разсмотрѣна система послѣдовательностей, опредѣляющая число e .

Въ заключеніе главы объ ирраціональномъ числѣ устанавливается соотвѣтствіе между значеніями величины и числами.

При разсмотрѣніи различныхъ учебниковъ по алгебрѣ, мы не разъ обращали вниманіе на изложеніе вопроса объ ирраціональномъ числѣ—этотъ вопросъ, видимо, стоитъ на очереди, интересуется преподавателей, а потому позволимъ себѣ указать на нѣкоторыя сочиненія, которыя, по нашему мнѣнію, могли бы быть полезны преподавателю въ этомъ отношеніи:

1) *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*. Томъ I—статья Принсгейма (во французскомъ изданіи изложенная и обработанная Молькомъ). Читатель найдетъ здѣсь сущность различныхъ теорій ирраціональнаго числа, историческія указанія и богатые указанія литературы вопроса.

2) *Деберъ и Вельштейнъ*. Энциклопедія элементарной математики. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей В. Ф. Кагана. Изданіе Матезисъ. Точка зрѣнія Дедекинда.

3) *Проф. А. В. Васильевъ*. Введеніе въ анализъ. Выпускъ II. Обобщеніе понятія о числѣ. (Складъ изданія: Казань, Маркеловъ и Шароновъ).

Сущность различныхъ теорій ирраціональнаго числа.

4) *Дедскиндъ*. Непрерывность и ирраціональныя числа. Пер. съ нѣм. С. О. Шатуновскаго. Изданіе Матезисъ.

Это же сочиненіе помѣщено въ весьма интересномъ «Сборникѣ статей по основамъ ариметики», изданіе математическаго кружка при Казанскомъ университетѣ, подъ редакціей Н. Н. Парфентьева.

5) Проф. Б. Я. Букрѣевъ. Ученіе объ ирраціональномъ числѣ съ точки зрѣнія Г. Кантора и Э. Гейне.

6) Проф. Семивановъ. Безконечныя десятичныя дроби и ирраціональными числа. Точка зрѣнія Вейерштрасса.

7) Арифметика ирраціональныхъ чиселъ. Обработалъ М. В. Шпрожковъ. Эта книжка, какъ видно изъ предисловія, представляетъ обработку теорій ирраціональныхъ чиселъ, изложенную ученикамъ старшихъ классовъ Сиб. 5-ой гимназіи покойнымъ преподавателемъ этой гимназіи Владиміромъ Андреевичемъ Марковымъ. Въ изложенной теоріи проводится точка зрѣнія, припикающая къ Вейерштрассу.

8) Проф. Б. М. Колловичъ. Лекціи по высшей математикѣ.

Читатель найдетъ весьма доступное и элементарное изложеніе теорій ирраціональнаго числа—точка зрѣнія Дедекинда и отчасти Мере-Кантора.

9) Проф. Боннскаго универ. Гергардъ Ковалевскій. Основы дифференціального и интегрального исчисленій. Перев. съ нѣм. подъ ред. С. О. Шатуловскаго. Изд. Математичесъ.

При опредѣленіи ирраціональныхъ чиселъ авторъ примыкаетъ къ Дедекинду, а въ опредѣленіи арифметическихъ операцій надъ ними—къ Кантору.

10) *Meray. Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale.*

11) *J. Tannery. Introduction à la theorie des fonctions.*

12) *J. Tannery. Leçons d'arithmétique.*

Въ этихъ двухъ сочиненіяхъ читатель найдетъ весьма ясное и изящное изложеніе теорій ирраціональныхъ чиселъ по Дедекинду.

13) *B. Niewenglowsky. Cours d'algèbre. Tome premier.* 5-е изд.

Изложеніе теорій ирраціональныхъ чиселъ примыкаетъ къ Мере.

14) Проф. Фосса. О сущности математики. Рѣчь произнесенная въ публичномъ засѣданіи Баварской академіи наукъ. Пер. І. В. Яшунскаго. С.-Петербургъ 1911 г.

Читатель можетъ познакомиться въ этой брошюрѣ съ сущностью различныхъ теорій ирраціональнаго числа въ связи съ вопросомъ развитія понятія о числѣ вообще.

Хотя мы въ своемъ докладѣ и не задаемся цѣлью дать полный обзоръ по литературѣ предмета алгебры, однако, мы не считаемъ возможнымъ не коснуться нашихъ періодическихъ изданій, въ которыхъ затрагиваются вопросы преподаванія математики.

Наша задача, правда, облегчается тѣмъ, что такихъ изданій у насъ къ сожалѣнію, слишкомъ мало. Журнала, специально посвященнаго вопросамъ преподаванія математики, у насъ нѣтъ совсѣмъ *); статьи, относящіяся къ преподаванію математики, чаще всего встрѣчаются въ журналѣ: «Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики», затѣмъ въ «Педагогическомъ сборникѣ», издаваемомъ при главномъ управленіи военно-учебныхъ заведеній и рѣдко въ «Журналѣ Министерства народнаго просвѣщенія» (почти только рецензіи учебниковъ и пособій) и «Русской Школѣ».

Въ виду интереса, возбужденнаго вопросомъ о реформѣ преподаванія математики, въ послѣднихъ семестрахъ журнала «Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики» появилось больше, сравнительно съ предъидущими семестрами, статей, посвященныхъ вопросамъ преподаванія математики; изъ нихъ укажемъ на слѣдующія:

В. Каганъ. Что такое алгебра?—(42-ой семестръ) эта статья издана Матезисомъ въ видѣ небольшой брошюры. Авторъ, между прочимъ, обращаетъ вниманіе на то, что статьи относящіяся къ вопросу расширенія понятія о числѣ, должны быть отнесены къ арифметикѣ, предметомъ алгебры

*) После того, какъ этотъ докладъ былъ прочитанъ на сѣдѣ, вышелъ первый номеръ журнала Московскаго математическаго кружка «Математическое Образованіе».

является изученіе алгебраическихъ функций и эту точку зрѣнія на содержаніе предмета алгебры авторъ полагаетъ возможнымъ провести, хотя бы до нѣкоторой степени, въ выпускномъ классѣ средней школы.

2) По вопросу объ ирраціональныхъ числахъ читатели найдутъ въ журналѣ статьи Е. Симпсова и К. Лебединцева (43-й и 44-й семестры).

Въ № 4, 45-го семестра помѣщена интересная статья прив. доц. С. Виноградова «Новая книга по алгебрѣ». Авторъ знакомитъ съ новымъ учебникомъ алгебры, принадлежащимъ двумъ англійскимъ педагогамъ-математикамъ Варпарду и Чайльду. Въ этой статьѣ указывается, что авторы разсматриваемаго учебника стремились создать такой курсъ элементарной алгебры, въ которомъ ярко выступала бы связь между отдѣльными главами, выбравъ для этой цѣли понятіе о числѣ, какъ центральное.

Разработку въ курсѣ понятій объ уравненіи и функции можно назвать, по словамъ С. Виноградова, образцовой.

Въ журналѣ «Педагогическій Сборникъ» отиѣтимъ статью Лебединцева, помѣщенную въ Сентябрьской книжкѣ 1910 г. и посвященную вопросу о постановкѣ курса алгебры въ средней школѣ».

Послѣ этого доклада было сдѣлано слѣдующее заявленіе К. Н. Деруновымъ.

К. Н. Деруновъ (Сиб.), составитель книги «Примѣрный библиотечный каталогъ»¹⁾, просилъ присутствовавшихъ помочь библиографамъ, и ему въ частности, въ дѣлѣ подбора избранной математической литературы. Указавъ на желательность распространенія образцовыхъ популярныя изданій математическаго характера и отиѣтивъ неосвѣдомленность многихъ преподавателей и любителей математики относительно нѣкоторыхъ

¹⁾ Примѣрный библиотечный каталогъ. Избранная литература по всѣмъ отраслямъ знанія. I и II части изд. Сиб. 1903—1911 г.

изданій общаго математическаго или историко-философскаго содержанія,—К. Н. Деруновъ предложилъ выяснить путемъ обмена мнѣнiями названiя такого рода сочиненiй. Кроме того К. Н. Деруновымъ былъ предложенъ листъ съ небольшимъ перечнемъ подобранныхъ имъ самимъ изданiй, и составитель обратился къ присутствовавшимъ съ просьбой вычеркнуть изъ малочисленное или устарѣвшее и, наоборотъ, вписать тѣ сочиненiя, которыя заслуживаютъ вниманiя.

Математика.

- √ 15. Бергранцъ И.—Арифметика. Спб. 01. 2 р. } Изд. Шпрожкова.
- 16. " Алгебра. 2 в. Спб. 99. 3 р. }
- √ 17. Побылшъ В. В.—Философское, научное и педагогическое значенiе исторiи [математики М. 86. 50]
- √ 18. " Происхожденiе, развитiе и современное состоянiе исторiи [математики М. 86. 50]
- √ 19. " Исслѣдованiе по исторiи математики. М. 87—96. 1 р. 75
- √ 20. " Биографiи знаменитыхъ математиковъ XIX ст. М. 86—94. 3 р. 35
- √ 21. Васильевъ А.—Изъ исторiи и философию понятiя о числѣ положительно [числѣ Кз. 91. 30]
- √ 22. " И. И. Лобачевскiй. Кз. 94. 50 к.
- √ 23. Ващенко-Захарченко М. З. Исторiя математики т. 1. Кз. 83. 6 р.
- 24. " Алгебр. анализъ Кз. 87. 4 р. 50 к.
- √ 25. Веберъ и Вельштейнъ. — Энциклопедiя элементарной математики. II [«Math». т. I. Од. 07. 3 р. 50]
- √ 26. Гауссъ, Вольтрамъ и др.—Объ основанiяхъ геометрiи; 2 изд. Кз. 95. 1 р. 2
- √ 27. Гельмгольцъ Г.—О происхожденiи и значенiи геометрическихъ аксиомъ [Изд. «Н. Об.» Спб. 95. 30]
- √ 28. Гельмгольцъ Г. } Счетъ и мѣрение. } Пр. Васильева. Кз. 93. 50 к.
- Кронекеръ Л. } Понятiе о числѣ }
- 29. Гюнтеръ Н.—Аналитическая геометрiя. Спб. 04.
- √ 30. Дедекинды Р. — Непрерывность и иррациональныя числа. Изд. «Мат.» [Од. 06. 41]
- √ 31. Дюрингъ Е.—Мысли о лучшей постановкѣ преподаванiя и наученiя математики. Пр. Маркусевъ. М. 01
- √ 32. Ермаковъ В. П.—Теорiя иррациональностей Кз. 79. 1 р. 50 к.
- 33. Клейнъ Ф.—Сравнительное обзорѣе новыхъ геометрическихъ вѣтвей. —Пр. Силцова. Кз. 96. 3
- √ 34. " Лекцiи по избраннымъ вопросамъ геометрiи Кз. 98. 75 к.
- 35. Клоссовскiй А.—Символы элементарной математики. Од. 05.
- √ 36. Контъ О.—Курсъ положительной философи. Т. I. Изд. Гартъс. Спб. 18
- 37. Лежандръ.—Элементарная геометрiя. 2 изд. Спб. 79.

- ✓ 38. Лявшінова Е. О.—Н. И. Лобачевскій. Сиб. 95. 25 к. } Иад. Павленкова.
 ✓ 39. " " С. В. Ковалевская. Сиб. 94. 25 к. }
 ✓ 40. Лоренцъ Г.—Элементы высшей математики. 2 т. 2 пад. Сятіпа. (В. д. С.)
 (М. 08. 5 р.
 ✓ 41. Любасъ Э.—Математическія развлеченія. Иад. Павленкова. Сиб. 83. 1 р.
 ✓ 42. Начала Евклида. Иад. Ващенко-Захарченко. Кв. 80. 6 р.
 ✓ 43. Неристъ В. и Шеффилъ А.—Краткій и элементарный курс. дифференці-
 (альнаго и интегральнаго исчисления Иад. Пешансина. М. 01. 2 р.
 ✓ 44. Понсильо Ж.—Начала анализа бесконечно-малых. Иад. Лондона и Короткова.
 (М. 1. Кв. 06. 1 р.
 45. Перри Д.—Курсъ высшей математики. Иад. Гомьстена 2 ч. Сиб. 02—4
 46. Покровский П. М.—Памяти К. Вейерштрасса. Кв. 93. 25 к.
 ✓ 47. Поссе К.—Курсъ дифф. и интегр. исчисления. Сиб. 03. 4 р.
 ✓ 48. Приаждованіе Имп. Казан. Ун. 100-лѣтія годовщины для рожденія П. И.
 Лобачевского. Кв. 94. 1 р.
 49. Ройтманъ Д.—Начала геометріи. Сиб. 06. 40 к.
 ✓ 50. Сборникъ научно-популярныхъ статей Пуанкаре и др. по основаніямъ ари-
 (метики. Пр. п. р. Парфентьева. Кв. 06. 1 р. 10 к.
 51. Серра.—Тригонометрія. Пр. Вроблевскаго. Сиб. 02.
 ✓ 52. Симпсонъ А. В.—Объ аксіомныхъ геометріи въ связи съ ученіемъ геометре-
 (метровъ. Кв. 94. 50 к.
 53. Сомовъ П. О.—Векторіальныи анализъ. Сиб. 07. 2 р.
 54. Начертательная геометрія. 3 изд. Сиб. 81. 2 р.
 ✓ 55. Суворовъ Э. М.—Объ основаніяхъ геометріи Лобачевского. Кв. 94. 20 к.
 ✓ 56. Тоддгартъ И.—Координатная геометрія на плоскости. Иад. Павленкова. Сиб.
 (01. 1 р. 50 к.
 57. Начальн. теорія уравненій. Иад. Вольфа 3 р.
 58. Алгебра Иад. Павленкова. Сиб. 91.
 59. Тороновъ К.—Краткій курсъ прямоугольной тригонометріи. Прм. 95.
 ✓ 60. Флиппинъ М.—Элементарная теорія вѣроятностей. Сиб. 96. 40 к.
 ✓ 61. Фрейсманъ Ш.—Очерки философіи математики. 2 изд. «Обр.» Сиб. 02. 60 к.
 ✓ 62. Шаль.—Историческій обзоръ происхожденія и развитія геометрическихъ
 (методовъ. М. 83. 3 р.
 ✓ 63. Шереметевскій В.—Значеніе математическаго анализа для изученія при-
 (роды. М. 97. 40 к.
 64. Эратъ Г.—Тригонометрія. Иад. «Фм. 116». Нк. 05. 45 к.
 ✓ 6423. (И.) Адлеръ, А.—Теорія геометрическихъ построеній. Изд. «Math». Од. 10.
 (2 р. 25 к.
 ✓ 6424. Болустинъ, В.—Какъ постепенно пришли люди до постоянной арифметики.
 (Иад. «Ид. Л.» М. 07. 75 к.
 ✓ 6425. Борель-Штекель.—Элементы математики. Иад. «Math». Од. 11. 3 р.
 ✓ 6426. Веберъ и Веллштейнъ⁹—Энциклопедія элементарной математики.
 (Иад. «Math».
 ✓ 6427. Власовъ, А. К.—Теорія вѣроятностей. М. 09. Т. II. Од. 09—10. 5 р. 50 к.
 ✓ 6428. Володкевичъ, Н. Н.—къ вопросу о реформѣ преподаванія математики.
 (Кв. 10. 40 к.
 ✓ 6429. Дедекиндъ, Р.—Непрерывность и иррациональныя числа. Иад. «Math»
 (Од. 08. 40 к.
 ✓ 6430. Каганъ, В. Ф.—Основанія геометріи. Од. 07.

- ✓ 6431. Каганъ, В. Ф.—Что такое алгебра? Од. 10 40 к.
 ✓ 6432. Копалевскій, Г.—Введеніе въ исчисленіе бесконечно-малыхъ. Изд. «Math». {Од. 09. 1 р.
 ✓ 6433. Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Изд. [«Math». Од. 1. 13 р. 50 к.
 ✓ 6434. Калжорн, Ф.—Исторія элементарной математики. Изд. «Math». Од. 10. 2 р. 50 к.
 ✓ 6435. Лангльс.—Опытъ философіи теоріи вѣроятностей. Пер. и р. Власова [М. 08. 1 р.
 ✓ 6436. Мюльх, О.—Легкая математика. Изд. Сытпна. М. 09. 1 р. 60 к.
 ✓ 6437. Норсичъ, Г.—Элементы высшей математики. 3 изд. Сытпна. Т. I. М. 10.
 ✓ 6438. Марковъ, А.—Исчисленіе вѣроятностей. Спб. 08.
 ✓ 6439. Морозовъ, П.—Начала векторіальной алгебры Изд. «Общ. Печ.» Спб. 09. 2 р.
 6440. Перри, Д.—Практ. математика. Изд. Сытпна. М. 08. 90 к.
 ✓ 6441. Фоссъ, А.—О сущности математики. Изд. «Phys.» Спб. 11. 85 к.

Къ заявленію К. П. Дерунова собраніе отнеслось съ интересомъ, но, вѣроятно, изъ-за недостатка времени и утомленія присутствовавшихъ—просьба К. П. осталась въ концѣ-концовъ неудовлетворенной.

II. Обзоръ нѣкоторыхъ руководствъ по элементарной геометріи.

Докладъ А. Р. Кулишера (Спб.).

«Въ обзорѣ руководствъ по элементарной геометріи я останавлиюсь на описаніи, главнымъ образомъ, слѣдующихъ семи сочиненій 1) Ланцери и Вассани *). *Начала геометріи*. 2) Генрици и Трейтлейнъ. *Учебникъ элементарной геометріи*. 3) Мерз. *Новыя начала геометріи*. 4) Веропезе. *Начала геометріи*. 5) Энрикесъ и Амальди. *Начала геометріи*. 6) Клейнъ. *Вопросы элементарной и высшей математики* т. II гл. 3 и 7) Энрикесъ, *Вопросы элементарной геометріи*. Сверхъ того, въ связи съ книгой Мерз, нельзя будетъ не упомянуть о примыкающихъ къ ней двухъ учебникахъ *Бурла* и *Борелл*—8 и 9. Последніе два учебника и первыя

*) G. Lazzari und A. Bassani. *Elemente d. Geometrie*. Переводъ съ 2-го итальянскаго изд. (1-е изд. вышло въ свѣтъ въ 1891 г.). Р. Treutlein's Berlin, 1911 г. XVI+491 стр. (большой форматъ).

2) I. Henrici et P. Treutlein. *Lehrbuch d. Elementar-Geometrie*. Изд. 4-е, Лейпцигъ, 1910 (1-е изд., 1891 г.). 571 стр. (большой форматъ).

пять изъ названныхъ сочиненій характерны для существующихъ на Западѣ теченій въ преподаваніи геометріи и вмѣстѣ съ тѣмъ позволяютъ намъ въ томъ случаѣ, если бы мы согласились съ точкой зрѣнія авторовъ, непосредственно приложить на практикѣ въ преподаваніи ту или другую часть разработанныхъ ими курсовъ и отчасти избавить себя и учениковъ отъ нѣкоторыхъ ошибокъ и увлеченій, сопровождающихъ всякое значительное измѣненіе въ преподаваніи. Хотя первыя изданія этихъ книгъ помѣчены датами довольно отдаленными, но идеи, въ нихъ заключающіяся, даже на родинѣ авторовъ получили широкое распространеніе лишь въ послѣднее десятилѣтіе, а не являются сколько-нибудь устарѣлыми. Сочиненія же Клейна и Эрикеса (6 и 7 въ нашемъ спискѣ) могутъ освѣтить преподавателю геометріи его путь съ болѣе широкихъ точекъ зрѣнія. Что касается до литературы по элементарной геометріи за послѣдніе годы на русскомъ языкѣ, то я ее здѣсь не рассматриваю, такъ какъ предполагаю, что по поводу другихъ докладовъ, соприкасающихся съ даннымъ предметомъ и помѣщенныхъ въ программѣ занятій Съезда, докладчики и лица, принимающіе участіе въ преніяхъ, быть можетъ даже не касаясь самихъ учебниковъ, отиѣтятъ все сколько-нибудь для послѣднихъ характерное. Къ тому же учебную литературу на русскомъ языкѣ обсуждаютъ всегда въ многочисленныхъ рецензіяхъ, помѣщаемыхъ въ журналахъ.

3) Ch. Méray. *Nouveaux Éléments de Géométrie*. Изд. 3-е. Парижъ, 1906 г., 309 стр.

[Borel. *Géométrie*. C. Bourlet. *Cours abrégé de géométrie* (см. влѣко)].

4) G. Veronese. *Elementi di Geometria*. 4-е изд. (1-е изд. въ 1897 г.) Падуя, 1909 г. (мал. форм.), 381 стр.

5) F. Enriques et U. Amaldi. *Elementi di Geometria*. 5-е изд. (1-е изд. въ 1903 г.). Болонья, 1911 г. (мал. форматъ) 616 стр...

6) F. Klein. *Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkte aus* T. II. Лейпцигъ, 1909 г., 514 стр., въ изд. *Mathesis* печатается русскій переводъ.

7) F. Enriques. *Fragen d. Elementar-Mathematik*. Перев. съ итальянскаго (1-е изд. 1900 г.) XI + 714; согласно проспекту въ издательствѣ *Physice* готов. русскій переводъ.

8) E. Borel. *Géométrie*. Парижъ, 1905 г., X+383 (мал. форм.).

9) C. Bourlet. *Cours abrégé de Géométrie*. Парижъ, 1908 г., XXII+646 стр. (мал. форм.).

I. Мы представимъ себѣ характеръ сочиненія Лаццер и Вассани, быть можетъ, наиболѣе ясно, если остановимся подробно на одной изъ пяти «книгъ», на которыя распадается эта работа, и лучше всего на первой «книгѣ».

По выясненіи того, какимъ путемъ создаются у нас конкретныя представленія о пространствѣ, тѣлѣ, поверхности, линіи и точкѣ, авторы на протяженіи пяти страницъ крупнаго формата (за вычетомъ небольшого числа стрѣкъ, посвященныхъ второстепеннымъ опредѣленіямъ и нѣкоторымъ поясненіямъ) излагаютъ первые 7 постулатовъ ихъ подраздѣленія. Это будутъ: I постулатъ о *геометрическихъ образахъ*; II и III постулаты *движенія*; IV постулатъ о *дѣлимости* на части *пространства, поверхностей, линій*; V-й постулатъ *опредѣляющій прямую*; VI-й постулатъ *опредѣляющій плоскость*; VII-й постулатъ, *опредѣляющій взаимное* расположеніе плоскостей и также *прямыхъ, другъ съ другомъ* пересѣкающихся или совмѣщающихся. Двумя доказанными на основаніи этихъ постулатовъ теоремами и слѣдствіями изъ нихъ заканчивается первый отдѣлъ (Abschnitt) первой книги. Во второмъ отдѣлѣ разбирается вопросъ объ отрѣзкахъ и углахъ линейныхъ и двугранныхъ. Отрѣзкамъ, какъ таковымъ, уделено очень немного мѣста, по сравненію съ разбираемыми ниже курсомъ Энрикеса-Амальди и Веронезе. Уголъ линейный (двугранный) опредѣляется, какъ одна изъ двухъ частей, которыя раздѣляются плоскость (пространство) двумя полными, выходящими изъ одной точки (полуплоскостями, исходящими черезъ одну прямую). VII-ой Постулатъ *скошенія или сдвига*, а также *вращенія* прямой и плоскости, слѣдствіемъ изъ котораго является равенство развернутыхъ угловъ. IX-й Постулатъ Архимеда и рядъ теоремъ слѣдствій, съ нимъ связанныхъ, отрѣзки и углы подводятъ подъ понятія классовъ величинъ. Третій отдѣлъ (начиная съ стр. 25) отводится совмѣстному изученію основныхъ свойствъ круга и шара, и пересѣченіи окружности, заключающемуся установленіемъ (путемъ доказательствъ) пропорциональности между центральными углами и соответствіи

ными имъ дугами, съ одной стороны, и аналогичной зависимостью между сферическими двусторонниками и соответствующими имъ двугранными углами, съ другой стороны. Четвертый отдѣлъ (стр. 35 — 51) посвященъ совмѣстному же изслѣдованію параллельности прямыхъ и плоскостей, при чемъ признакомъ параллельности прямыхъ, находящихся въ одной плоскости, является ихъ пересѣченіе. Доказывая параллельность такихъ прямыхъ при равенствѣ угловъ, внутреннихъ на-крестъ лежащихъ, авторы «перекладываютъ» отрѣзокъ сѣкущей (такъ, чтобы прежнее начало его совпадало съ прежнимъ концомъ и обратно) заключенный между 2-мя параллельными вмѣстѣ съ соответствующей частью плоскости, при томъ такъ, чтобы эта часть, находившаяся вправо отъ сѣкущей, была наложена на часть, находившуюся влѣво. Для насъ важно отмѣтить лишь тотъ фактъ, что тутъ при доказательствѣ пользуются (съ полнымъ правомъ) движеніемъ, которое раньше было наделкающимъ образомъ постулировано. По содержанію своему этотъ отдѣлъ мало разнится (но все же разнится) отъ того, что обычно мы находимъ въ соответственныхъ частяхъ курсовъ планиметріи и стереометріи, если только не забыть, что здѣсь вопросъ трактуется одновременно на плоскости и въ пространствѣ, и что тутъ неминусемо читатель встрѣтитъ нѣкоторые мелкія интересныя детали, обусловленныя самимъ построеніемъ сочиненія. Въ теоремахъ 53, 54, 55 и 56 устанавливается возможность дѣленія отрѣзковъ (при томъ только однимъ способомъ) на любое число разныхъ частей и раздѣленія на 2, 4, 8 и т. д. равныхъ частей угловъ линейныхъ и двугранныхъ и указываются способы выполненія этихъ построеній.

Въ пятомъ отдѣлѣ (стр. 52—61), аналогично предыдущему четвертому отдѣлу, изучается вопросъ о перпендикулярности прямыхъ и плоскостей (въ частности доказательство перпендикулярности прямой къ плоскости основывается на вращеніи). Рассмотрѣно также построеніе кратчайшаго разстоянія между двумя не пересѣкающимися прямыми, не лежащими въ одной плоскости (что же касается до равен-

ства прямыхъ угловъ, то оно является слѣдствіе равенства развернутыхъ угловъ, а, стало быть, и ихъ половинъ; въ отличіе отъ многихъ обычныхъ доказательствъ съ тѣмъ же ходомъ мысли, здѣсь при всей простотѣ вывода каждый шагъ надлежащимъ образомъ обоснованъ, но это, разумѣется, не единственный путь доказательства равенства прямыхъ угловъ).

На 61-ой страницѣ дается опредѣленіе симметріи относительно точки, оси и плоскости, а также симметрія фигуры относительно ея самой, съ указаніемъ примѣровъ симметріи въ изученныхъ фигурахъ и тѣлахъ.

Въ промежуткѣ между 4-мъ и 5-мъ постулатами дано опредѣленіе однозначнаго соответствія, которымъ и пользуются въ соответственныхъ мѣстахъ изложенія, нѣсколько измѣняя обычную формулировку положеній. Не упущенъ изъ виду также вопросъ о направленіи сторонъ угла. Книга заканчивается спискомъ теоремъ (числомъ 33), геометрическихъ мѣстъ (47 вопросовъ) и задачъ (74 задачи), трудность которыхъ такова, что съ ними можетъ справиться средній ученикъ, добросовѣстно проработавшій предшествующія страницы. Эти заключительные вопросы подобраны съ тщательностью и притомъ такъ, что при разрѣшеніи хотя бы даже небольшого числа учащійся найдутъ здѣсь матеріалъ не только для укрѣпленія въ памяти изученныхъ отдѣловъ, но и для послѣдовательнаго ихъ развитія.

Во вторую книгу вошли многоугольники, въ частности треугольники (линіи ломаныя, стороны треугольника и углы, зависимость между ними и т. д.).

Равенство треугольниковъ мы находимъ на стр. 79. затѣмъ идутъ теоремы, относящіяся къ равенству многоугольниковъ; въ общемъ довольно близкое къ обычному разсмотрѣніе параллелограмма, прямоугольника, ромба. Но на страницѣ 94-й мы опять возвращаемся къ пространству трехъ измѣреній и знакомимся съ многограннымъ угломъ. взаимнымъ расположеніемъ его плоскихъ угловъ въ отдѣльных случаяхъ, съ угломъ трехграннымъ, признаками равенства угловъ трехгранныхъ, построе-

ніемъ тѣхъ и другихъ, достаточно обстоятельнымъ разсмотрѣніемъ многогранниковъ вообще, пирамидъ и призмъ въ частности.

Удѣливъ еще 4 страницы параллелизму (125—128 стр.), авторы переходятъ къ нѣкоторымъ несложнымъ теоремамъ и основнымъ построеніямъ на плоскости и въ пространствѣ (геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ концовъ отрѣзка, отъ двухъ точекъ на плоскости и т. п., опусканіе перпендикуляра на прямую изъ данной точки, дѣленіе угла на плоскости на двѣ равныя части и т. д.).

Приложено къ второй книгѣ 236 теоремъ, предложеній, относящихся специально къ геометрическимъ мѣстамъ, и задачъ, также тщательно подобранныхъ, какъ и въ первой книгѣ. Характеръ книги, думается, настолько опредѣленъ указанной выше послѣдовательностью въ распредѣленіи матеріала въ первой книгѣ, что въ дальнѣйшемъ, говоря о содержаніи сочиненія достаточно будетъ отмѣтить лишь нахожденіе въ книгѣ страницъ, на которыхъ разсматриваются вопросы о совокупностяхъ окружностей и совокупностяхъ сферъ (ихъ степени), геометрія на сферѣ, пиверсія, общее ученіе о равновеликости и его приложенія (260—307 стр.), неизмѣримыя и несоизмѣримыя геометрическія величины, вопросъ о подобномъ расположеніи и подобіи и что число всѣхъ дополнительныхъ вопросовъ для самостоятельныхъ работъ учениковъ въ книгѣ равно 1066.

Эта книга можетъ быть полезна для преподавателя:

во 1-хъ, какъ образецъ талантливаго, увѣреннаго, смѣлаго, не поверхностнаго сѣдиненія планиметріи съ стереометріей;

во 2-хъ, какъ руководство, въ которомъ имѣется, помимо богатаго матеріала, много страницъ, гдѣ знакомые намъ по обычнымъ курсамъ, въ нѣсколько отрывочной формѣ, вопросы излагаются особенно сжато и связно;

въ 3-хъ потому, что авторы, пользуясь въ своихъ доказательствахъ время отъ времени движеніемъ (въ томъ смыслѣ, какъ мы понимаемъ движеніе твердыхъ тѣлъ), считаютъ необходимымъ обосновать это движеніе (равно какъ

и всѣ остальные моменты изложенія) соответственными постулатами. Сверхъ того, они отводятъ движенію ограниченную роль.

4) Въ книгѣ тщательно проведено и выяснено раздѣленіе матеріала на вопросы чисто геометрическіе и тѣ пункты, гдѣ приходится оперировать при помощи числа.

5) Книга при всей простотѣ и конкретности ея основныхъ положеній (постулатовъ) можетъ служить въ средней школѣ примѣромъ системы дедуктивныхъ умозаключеній (интересно также введеніе къ ней).

6) Сочиненіе является, въ силу сказаннаго, учебникомъ доказательнаго курса геометріи, хотя, конечно, нѣтъ надобности брать книгу во всемъ ея объемѣ, особенно въ виду нахождения въ ней нѣсколькихъ не вполне выдержанныхъ по изложенію мѣстъ.

II. Учебникъ Генрици и Трейтлейна *) состоитъ изъ трехъ частей (отдѣльные книжки): въ первой содержится планиметрія за исключеніемъ вопроса о подобіи, перспективномъ расположеніи фигуръ и измѣреніи длины периметра правильныхъ многоугольниковъ, длины окружности и площади круга, вошедшихъ вмѣстѣ съ элементами проективной геометріи на плоскости и очень основательнымъ курсомъ тригонометріи, и изученіемъ коническихъ сѣченій во вторую часть (239 страницъ); наконецъ, третья часть содержитъ обычные главы стереометріи и сферической тригонометріи въ изложеніи соответствующемъ тому, какое принято въ первыхъ двухъ частяхъ, элементы начертательной геометріи и дополнительное ученіе о коническихъ сѣченіяхъ) всего 3-ей части 240 стр.).

На первыхъ 19 страницахъ авторы рассматриваютъ основные геометрическіе образы и возможность возникновенія ихъ посредствомъ движенія, расположеніе двухъ точекъ на прямой и двухъ прямыхъ на плоскости, отрѣзки и направленіе прямыхъ, совместиость равныхъ отрѣзковъ, опредѣленіе угла, какъ части плоскости и какъ образа, возникающаго при вращеніи прямой, первыя теор-

ремы относительно смежныхъ и прямыхъ угловъ, опредѣленіе параллельности и характеристика прямолинейныхъ фигуръ на основаніи сторонъ фигуры и ея угловъ; ихъ совмести́мость, указаніе возможности совмести́мости плоскихъ фигуръ и ихъ совмести́нія путемъ слѣдующихъ 4-хъ видовъ движенія: 1) вращенія вокругъ точки въ плоскости самой фигуры; 2) поворота плоскости фигуры вокругъ оси, лежащей въ этой плоскости на два прямыхъ угла; 3) сдвига фигуры въ ея плоскости; 4) вращенія фигуры въ ея плоскости на опредѣленный уголъ. Заключаются первыя двѣ главы (19 стр.) разсмотрѣніемъ характера тѣхъ умозаключеній, съ которыми приходится имѣть дѣло въ геометріи, то есть тѣмъ, съ чего книга Маццери и Бассани начинается. Мы не находимъ также тѣхъ явно выраженныхъ постулатовъ, на которыхъ строить свое изложеніе авторы предыдущей книги. Тутъ насъ знакомятъ съ нѣкоторыми образами, а также съ нѣкоторыми приемами измѣненія изображенія этихъ образовъ, молчаливо опираясь при этомъ на нашъ опытъ въ области перемѣщеній твердыхъ тѣлъ въ окружающемъ насъ мірѣ. Но начиная съ третьей главы, при помощи такого, на-примѣръ, геометрическаго образа (см. книгу) вскрывается болѣе детально характеръ вращенія фигуры вокругъ точки и сразу чрезвычайно просто и изящно доказывается рядъ теоремъ, и слѣдствій относящихся къ угламъ съ взаимно параллельными и перпендикулярными сторонами. Учащійся долженъ неминуемо увидѣть, что въ его распоряженіи имѣются весьма цѣнные способы изслѣдованія плоскихъ фигуръ, и это представленіе, благодаря мастерскому расположенію авторами матеріала, учащійся можетъ приобрести основательно изучивъ подъ руководствомъ преподавателя всего 29 первыхъ страницъ!

Равнымъ образомъ поворотъ плоскости фигуры на два прямыхъ угла даетъ поводъ связать это движеніе съ вопросомъ о симметріи относительно осн, что въ свою очередь сопровождается разсмотрѣніемъ съ соответствующей точки зрѣнія равнодѣляющей угла, прямой перпен-

дикулярной къ отръзку и проходящей черезъ его середину и свойства элементовъ равнобедренныхъ треугольниковъ, неравныхъ отръзковъ въ треугольникахъ, а также его «примѣчательныхъ» точекъ (все это образуетъ главу четвертую 29—38 стр.). Тутъ умѣстно будетъ указать, что въ разсматриваемой книгѣ широко примѣняется съ самаго же начала приемъ изложенія, основанный на соответствіи некоторыхъ свойствъ геометрическихъ образовъ, на двойственности, приемъ широко использованный въ проективной геометріи и въ послѣднее время встрѣчающійся въ некоторыхъ руководствахъ по элементарной геометріи. Приемъ этотъ изобрѣтенный Жергономъ, состоитъ въ расположеніи въ два столбца соответственныхъ опредѣленій и теоремъ. Такъ у нашихъ авторовъ мы найдемъ уже на стр. 15 слѣдующія строки:

на стр. 17:

Три точки, соединенныя тремя прямыми, образуютъ треугольникъ.

Три прямыя, взаимно пересекающіяся въ трехъ точкахъ, образуютъ трехсторонникъ.

Въ совмѣстныхъ фигурахъ:

а) соответствующія точки лежатъ на соответствующей прямой.

а) соответствующія прямыя проходятъ черезъ соответственные же точки.

б) прямой соединяющей две точки соответственныя прямой, соединяющей соответственные же две точки.

б) Точку пересѣченія (а также углу) двухъ прямыхъ отсѣкаетъ точка пересѣченія (а также уголъ) соответственныхъ прямыхъ.

Или, скажемъ, на стр. 31, гдѣ рѣчь идетъ о равнобедренныхъ треугольникахъ.

1. Если m равнодѣлящая угла между прямыми a и b , то на этихъ послѣднихъ имѣется рядъ точекъ A и B , которыя при поворотѣ фигуры вокругъ m на два прямыхъ угла попарно совпадаютъ; каждая такая пара точекъ вмѣстѣ съ точкой пересѣченія прямыхъ a и b (точкой C) является концами равныхъ отръзковъ.

Точки A , B , C образуютъ треугольникъ съ двумя равными сторонами.

1. Если точки A и B расположены на равныхъ расстояніяхъ отъ прямой m , то на этихъ точкахъ можно провести рядъ полулучей, а a и b которые при поворотѣ фигуры на два прямыхъ угла вокругъ m попарно совпадаютъ; каждая такая пара полулучей вмѣстѣ съ отръзкомъ между A и B (отръзкомъ c) образуютъ соответственно равные углы.

Прямые a , b , c образуютъ трехсторонникъ съ двумя равными углами.

Читатель безъ труда укажетъ много примѣровъ изложе-
нія въ два столбца на послѣдующихъ страницахъ.

Немалый интересъ въ первой книгѣ представляетъ изло-
женіе вопроса о равновѣсности фигуръ *).

Не вдаваясь въ дальнѣйшее описаніе книги отмѣтимъ
нѣкоторые важнѣйшія ея особенности:

1) Со стороны содержанія книга заключаетъ въ себѣ,
кромѣ элементарной геометріи, еще тригонометрію плоскости и
сферы, начала проективной, аналитической и начертательной
геометріи и большое собраніе задачъ.

2) При изложеніи планиметріи авторы не вводятъ
соотвѣствующихъ вопросовъ стереометріи (быть можетъ, это
распредѣленіе матеріала было въ свое время нѣкоторой усту-
пкой мнѣнію руководящихъ круговъ германской школы: пе-
реводъ книги Гаццери и Бассани на нѣмецкій языкъ
выполненъ Трейтлейномъ и въ предисловіи своемъ къ
послѣднему сочиненію переводчикъ выражаетъ пожеланіе
относительно хотя-бы частичнаго проникновенія въ школу
даннаго приѣма изложенія).

3) Изложеніе опицается не на явно указанную систему
постулатовъ (хотя бы и обширную), но на группу фак-
товъ связанныхъ съ нашими представленіями о пространствѣ
и совершающихся въ немъ движеній.

4) Авторы широко пользуются при изложеніи движе-
ніемъ, но дѣлаютъ это въ превосходной съ педагогической
точки зрѣнія формѣ и при томъ такъ, что вся книга произ-
водитъ впечатлѣніе чего-то одинаго.

5) Съ другой стороны, во всѣхъ вопросахъ изложеніе
ведется, такъ сказать, въ направленіи проективномъ.

6) Достаточно отчетливо проведена грань между гео-
метріей измѣренія и геометріей положенія.

7) Весьма интересны для педагога приѣмы из-
ложенія, состоящіе въ томъ, что общія положенія
время отъ времени даются въ книгѣ явнѣ послѣ того, какъ

*) См. статью Дарбу въ сочиненіи Rouse-Ball Histoire des Mathé-
matiques, v. II, p. 236. Парижъ 1907.

разработаны соответственные частныя теоремы, а также въ распредѣленіи ряда положеній въ два столбца.

III. Сочиненіе профессора Дижонскаго университета Мерэ, опирающееся на работу геометровъ главнымъ образомъ послѣдняго вѣка, было написано болѣе 35 лѣтъ тому назадъ, когда высказанныя авторомъ соображенія относительно направленія преобразованія преподаванія геометріи не могли быть достаточно оцѣнены ни широкими кругами соотечественниковъ, ни въ другихъ странахъ. Зато послѣднія оффиціальныя программы французской средней школы уже примыкаютъ къ плану, намѣченному Мерэ. Подробное изложеніе первыхъ двухъ книгъ въ нашемъ обзорѣ значительно облегчаетъ намъ характеристику сочиненія Мерэ, т. к. авторы ихъ ярко воплотили въ своихъ учебникахъ идеи, заключающіяся въ послѣдней работѣ, хотя, разумѣется, сочиненіе Мерэ было только частью тѣхъ новыхъ въ дидактическомъ отношеніи работъ, которыми располагали авторы итальянскаго ¹⁾ и нѣмецкаго учебниковъ. Въ соответствии съ тѣмъ, что нами только что было сказано, основными идеями Мерэ будутъ — примѣненіе движенія, какъ привіцна изложенія, смѣнаніе планиметріи и стереометріи и (до извѣстной степени) проведеніе проективной точки зрѣнія. Авторъ всюду старается показать, гдѣ находятся корни тѣхъ абстрактныхъ представленій, которыми мы пользуемся въ геометріи и далеко не все приводимыя имъ поясненія стали при помощи соответственныхъ руководствъ достояніемъ учительскихъ круговъ. У него нѣтъ явно выраженной системы постулатовъ, но, будучи приверженцемъ изложенія, основаннаго на движеніи ²⁾, онъ позволяетъ себѣ говорить о перенесеніи только послѣ нѣлаго ряда теоремъ; ту же осторожность мы видимъ и въ другихъ мѣстахъ этой работы. Время отъ времени мы встрѣчаемся съ обобщенными предложеніями, связывающимъ сразу въ одно нѣкое такіе образы, какъ, прямую, уголъ, часть плоскости между двумя параллельными прямыми и часть про-

¹⁾ См. ниже указаніе на статью профессора Веккя.

²⁾ Иначе намъ будутъ указаны руководства, въ которыхъ понятіе движенія исключено

странства между двумя параллельными плоскостями... Въ другомъ мѣстѣ мы встрѣчаемся съ такимъ характернымъ выраженіемъ, какъ «вырожденіе трехгранной пирамиды» въ плоскій образъ, гдѣ всѣ четыре ея вершины будутъ лежать въ одной плоскости. Проективная точка зрѣнія особенно ясно выступаетъ въ изложеніи свойствъ фигуръ подобно расположенныхъ. При всей внутренней стройности и законченности геометрическаго изданія, при множествѣ мѣстъ разработанныхъ настолько, что ихъ можно примѣнить непосредственно къ преподаванію, при множествѣ разбѣянныхъ намековъ на возможность того или другого способа изложенія, сочиненіе Мерзѣ остается книгой для преподавателя весьма полезной, но и не особенно легкой для чтенія.

Учебники Вореля и Бурле, построенные примѣнительно къ педагогическимъ идеямъ Мерзѣ, написаны болѣе просто, чѣмъ книги Бассани и Трейтлейна, не обладаютъ ихъ рельефностью со стороны разработки матеріала въ той мѣрѣ и съ тѣмъ освѣщеніемъ, какія мы желали бы видѣть въ средней школѣ, но заключаютъ небезынтересныя иллюстраціи. Со стороны содержанія надо отмѣтить въ каждой изъ нихъ нѣсколько вопросовъ тригонометріи, поскольку послѣдніе необходимы при первоначальныхъ вычисленіяхъ элементовъ треугольниковъ.

Книгѣ Вореля предпосланъ краткій обзоръ курса, обзоръ, который однако ни въ какомъ случаѣ нельзя признать достаточнымъ въ качествѣ пропедевтическаго курса. Въ книгѣ Бурле планиметрія отдѣлена отъ стереометріи. Въ книгѣ Вореля часть работы чисто геометрическая предшествуетъ той, въ которой разсматривается вопросъ объ измѣреніи площадей и объемовъ. Очень хорошо изложены въ книгѣ Бурле въ его стереометріи начала начертательной геометріи, которой онъ пользуется какъ при изученіи тѣлъ, такъ и въ теоріи тѣней. Не забыты въ обоихъ учебникахъ коническія сѣченія, а также нѣкоторыя другія кривыя. Въ томъ видѣ, какой учебники эти имѣютъ теперь, они, несмотря на новизну и талантливость изложенія, проигрываютъ по сравненію съ сочиненіями Бассани и

Трейтлейна. При некоторых видоизмѣненіяхъ (вѣроятно, опытъ французской школы укажетъ авторамъ, каковы должны быть эти измѣненія) книги, цѣныя уже теперь для преподавателя школы (главнымъ образомъ французской) не будутъ вызывать тѣхъ возраженій, какие невольнo возникаютъ у обозрѣвателя теперь.

При описаніи двухъ учебниковъ другого характера мы ограничимся лишь слѣдующими немногими строками, взятыми изъ статьи профессора Векки ¹⁾.

...«Отъ евклидовой системы откололась цѣлая группа руководствъ, выходившихъ въ свѣтъ одно за другимъ, внося въ школу результаты критики основъ геометріи, и, стало быть, болѣе высокую степень точности и строгости. Это теченіе завершается появленіемъ «*Элементовъ Геометріи*» Веронеза ²⁾. Уже въ своихъ «*Основахъ геометріи*» многихъ измѣреній и многократно именованныхъ прямолинейныхъ единицъ, изложенныхъ въ элементарной формѣ» ³⁾, опирался на глубокий анализъ основначаль, этотъ извѣстный ученый далъ въ изложеніи своей геометрической системы руководящіе принципы. Въ названныхъ «*Началахъ*» онъ даетъ (предварительно въ формѣ школьнаго руководства) при помощи точно выполненнаго теоретическаго изслѣдованія, строгое изложеніе и логическое обоснованіе элементарной геометріи. Выключивъ при помощи превосходныхъ по силѣ критическаго анализа соображеній понятіе о движеніи, характеризующее предшествующія руководства, онъ перечисляетъ въ явномъ видѣ всѣ постулаты, которые заложены въ фундаментъ его зданія, и дѣлаетъ обращеніе къ интуиціи, желая тѣмъ освободить мышленіе: онъ отирается отъ одного единственнаго основнаго понятія, понятія о точкѣ, изъ котораго логически слѣдуетъ построеніе другихъ геометрическихъ образовъ, причемъ существованіе

¹⁾ Mario Vekki. *Характеристика главнѣйшихъ руководствъ по элементарной геометріи, вышедшихъ въ свѣтъ въ Италіи за послѣдніе пятьдесятъ лѣтъ*. См. книгу Юнга. *Какъ преподавать мат.-математ.* Спб. 1912. прилож. 1-ое.

²⁾ G. Veronese. *Elementi di Geometria*. Падуя. 1897.

³⁾ G. Veronese. «*Fondamenti di Geometria a più dimensioni*... Падуя, 1891. Имѣется нѣмцкій переводъ, вычисленный А. Scherppомъ, Лейпцигъ, 1894.

этихъ послѣднихъ уже нѣтъ болѣе необходимости постулировать. Наиболѣе характерной чертой разсматриваемаго сочиненія является оригинальная теорія равенства, понимаемаго какъ извѣстное соотвѣтствіе; за основное понятіе принята здѣсь совмѣстимость отрѣзковъ; къ нему затѣмъ послѣдовательно приводится совмѣстимость другихъ образовъ. Опредѣленію параллельности и постулату параллельности, которые фигурируютъ у Евклида, авторъ придаетъ форму, болѣе согласную съ поставленнымъ требованіемъ выражать въ постулатахъ только тѣ наблюденія, которыя осуществлены; что касается «фузѳіонизма», то въ этой книгѣ установлены общія свойства прямой плоскости и пространства, что даетъ автору возможность трактовать затѣмъ одновременно спеціальныя вопросы: теорію равенства подобія и намѣренія величинъ. Веронезе, который въ нѣсколько лѣтъ выпустилъ рядъ изданій своего руководства, завершивъ циклъ этого рода книгъ, составилъ учебники геометріи для средней школы различныхъ типовъ въ соотвѣтствіи съ программами 1900 года, внося въ каждый изъ нихъ свое тонкое критическое чутье и большія знанія элементарной геометріи.

Большое сочиненіе профессора Федерико Энрикеса, о которомъ упомянуто выше въ замѣткѣ Маріо Векки и которое включено нами въ настоящій обзоръ, состоитъ изъ 17 работъ, содержащихъ въ себѣ какъ изложеніе крупныхъ наиболѣе теоретическихъ результатовъ, достигнутыхъ геометріей въ 19 столѣтіи, такъ и вопросы о разнаго рода остроеніяхъ, ихъ осуществимости и осуществленіи.

Уже въ 1900 году вышли въ свѣтъ «Вопросы элементарной геометріи» Ф. Энрикеса¹⁾, который въ этой своей книгѣ въ систематической формѣ изучилъ и разобралъ основные вопросы, относящіеся къ предмету сочиненія, опредѣленно удѣляя свое вниманіе требованіямъ педагогическимъ.

Книга, состоящая только изъ оригинальныхъ и чрезвычайно цѣнныхъ статей, была вѣрно задумана и имѣла успѣхъ.

¹⁾ F. Enriques „*Questioni riguardanti della geometria elementare*“. Волова, 1900. Иѣм. переводъ. *Die Fragen der Elementargeometrie*. Берлинъ 1911 г. Есть русскій переводъ 1913 г.

Въ ней приняли участіе ученые и дѣятельные работники; много исключительнаго труда положилъ на эту работу уже знаменитый геометръ Федерико Энрикестъ, бывший вдохновителемъ и руководителемъ изданія, и стоявшій въ преддверіи своей славы Уго Амальди.

Книга должна служить пособиемъ къ «*Элементамъ геометрии*», выпущеннымъ въ свѣтъ обоими названными авторами въ 1903 году ¹⁾. Особая цѣнность руководства объясняется тѣмъ, что въ немъ съ удивительной гармоніей сочетаются строго научное изложеніе основначалъ и соблюденіе наиболѣе тонкихъ требованій педагогическаго характера; на смѣну выключеннаго авторами принципа движенія, они вводятъ понятіе о равенствѣ не только отрѣзковъ, но и угловъ, примыкая такимъ образомъ къ взглядамъ Гильберта, постулаты котораго въ существенныхъ чертахъ тутъ нашли себѣ мѣсто. Конгруэнція другихъ образовъ устанавливается шагъ за шагомъ въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ при помощи соответственныхъ частныхъ опредѣленій, связывающихъ ее съ конгруэнціей отрѣзковъ и угловъ, которые въ данный образъ входятъ ²⁾.

Новизна и строгость придается цѣнность также изложенію теоріи равновеликости, которое тутъ представлено въ формѣ совершенно необычной и законченной. Для многоугольниковъ и призмъ сопоставленіе проводится авторами на почвѣ критерія разложимости на равныя части (Дюгамель), а для образовъ плоскихъ и тѣлъ, для которыхъ этотъ критерій (какъ доказалъ Рети, затѣмъ Денъ и въ недавнее время Каганъ) является недостаточнымъ, введено понятіе о равенствѣ протяженій (поверхностныхъ и объемныхъ), что позволяетъ дать строгую, съ точки зрѣнія логики формулировку классическаго процесса *истощенія*, который въ свою очередь пріобрѣтаетъ

¹⁾ F. Enriques e U. Amaldi. *Elementi di Geometria*. Болонья 1903 г.

²⁾ Среди многихъ деталей книги, характерныхъ своею новизной по сравненію со всѣми предшествовавшими руководствами, надо упомянуть о чрезвычайно изящномъ изложеніи одного вопроса, а именно: на основаніи известной теоремы о равноприкосновенныхъ сѣченіяхъ двуграннаго угла, устанавливаются, независимо отъ постулата параллельности, критеріи равенства трехъгранныхъ и многогранныхъ угловъ.

здѣсь изящѣйшую оболочку. Въ главѣ о пропорціяхъ авторы, оставаясь на почвѣ евклидова опредѣленія, придали теоріи законченность, благодаря которой отвлеченная сторона вопроса доводится до минимума, а выдвигаются отчетливо на первый планъ въ ихъ естественной связи конкретныя геометрическія приложенія. Таковы въ общихъ чертахъ особенности этой книги превосходной и новой, обладающей среди прочихъ своихъ достоинствъ также классической чистотой формы и совершенной прозрачностью изложенія, благодаря которымъ быстро понадобилось одно за другимъ нѣсколько изданій руководства, пользующагося въ школахъ всеобщимъ признаніемъ. Выдающіяся черты описаннаго нами руководства сохранились также въ тѣхъ сокращенныхъ переработкахъ, которыя съ тонкимъ пониманіемъ педагогическихъ требованій авторы написали для различнаго рода среднеобразовательныхъ учебныхъ заведеній: каждое изъ такихъ маленькихъ руководствъ стяжало себѣ прочный успѣхъ»...

Въ книгу Эрикеса «Вопросы элементарной геометріи» вошли слѣдующія статьи: 1) о философскомъ значеніи вопросовъ, относящихся къ основаніямъ геометріи (Эрикесъ); 2) замѣчанія о преподаваніи научной геометріи (Эрикесъ); 3) О понятіи прямой и плоскости (Амальди). 4; Конгруенція и движеніе. О приложеніяхъ постулата непрерывности въ элементарной геометріи (Витали); 6) Ученіе о равновеликости (Амальди); 7) Ученіе о пропорціяхъ (Вальяти); 8) Теорія параллельныхъ линій и неевклидова геометрія (Бопола).

Въ девяти остальныхъ статьяхъ авторы этой энциклопедіи разбираютъ вопросы, относящіеся къ рѣшенію задачъ на построеніе.

Строгое (и доступное для многихъ) научное освѣщеніе всѣхъ названныхъ вопросовъ, пользованіе первоисточниками, творческій характеръ всей дѣятельности авторовъ этихъ статей дѣлаетъ изученіе этой книги для преподавателей весьма желательнымъ, если не обязательнымъ.

Упомянемъ еще только, что статья покойнаго геометра

Бонола по содержанію нѣсколько разнится отъ его главной книги «неевклидова геометрія». Въ энциклопедіи Эрикеса Бонола удѣляетъ большее вниманіе неевклидовымъ построеніямъ.

Не менѣе высокій интересъ представляетъ книга Клейна (часть 2-ая). Не буду приводить теперь ея содержанія, такъ какъ переводъ этого сочиненія долженъ выдти въ свѣтъ въ ближайшемъ времени: въ ней переплетены вопросы элементарной и высшей математики, исторіи преподаванія этихъ областей науки и замѣчанія фактическаго характера.

Наконецъ, слѣдуетъ упомянуть о недавно вышедшей въ свѣтъ коллективной работѣ подъ редакціей профессора Дж. В. А. Юнга подъ названіемъ *Modern Mathematics*. Содержаніе этой послѣдней книги указано въ списокѣ книгъ въ переводѣ названнаго выше сочиненія Юнга «Какъ преподавать математику?»

III. Обзоръ литературы по ариметикѣ младшихъ и среднихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Докладъ В. Х. Майделя (Спб.)

«Предлагаемый вниманию Съѣзда обзоръ не исчерпываетъ всю учебную литературу названнаго отдѣла ариметики. Сдѣлать обзоръ всѣхъ вышедшихъ за послѣднее время учебниковъ, не представляется возможнымъ, да и надобности въ этомъ, думается, нѣтъ, такъ какъ многие учебники различаются между собою не по существу, а въ деталяхъ.

Всѣ учебники можно раздѣлять на двѣ группы: учебники систематическаго курса ариметики и учебники болѣе или менѣе конспективнаго характера, авторы которыхъ считались при составленіи своихъ учебниковъ съ тѣмъ взглядомъ, что въ самыхъ младшихъ классахъ изученіе арифметики должно вестись со словъ преподавателя и если нуженъ учебникъ, то только въ видѣ краткаго изложенія основныхъ моментовъ изучаемаго курса въ удобопонятной для ученика формѣ.

Къ учебникамъ первой группы принадлежатъ: «Ариометика» В. Ѳ. Гартца, изд. 4-е Сиб. 1909 г. «Систематическій курсъ ариометики» М. Б. Кюрзена, изд. 3-е. Сиб. 1912 г., «Ариометика» А. Б. Сахарова, изд. 2-е. Сиб. 1910 г., къ разсмотрѣнію которыхъ я и перейду.

Курсъ ариометики Гартца состоитъ изъ трехъ частей и прибавленія. Въ первой части изложено ученіе о цѣлыхъ числахъ, во второй—дроби, въ третьей—отношенія и пропорціи и связанныя съ ними задачи и, наконецъ, въ прибавленіи—статья о буквенныхъ доказательствахъ въ ариометикѣ и опредѣленіе срока векселя ($1\frac{1}{2}$ страницки). Отмѣчу только особенности курса. Въ первой части, во введеніи, установивъ понятіе о единицѣ, объ одинаковыхъ, различныхъ, именовавшихся и отвлеченныхъ единицахъ, авторъ даетъ опредѣленіе цѣлаго числа, какъ собранія или совокупности единицъ. Чтобы узнать число, надо въ первомъ случаѣ сосчитать единицы, или измѣрить величину—во второмъ.

Въ главѣ о письменномъ счисленіи авторъ устанавливаетъ признакъ для сравненія двухъ чиселъ (стр. 11).

Сложеніе опредѣляется авторомъ, какъ нахожденіе суммы, а сумма—какъ совокупность единицъ всѣхъ слагаемыхъ. (стр. 14).

Въ вычитаніи подчеркивается случай, когда вычитаніе невозможно (изъ меньшаго числа большее), (стр. 18). Приведенъ случай нѣсколькихъ вычитаемыхъ и свойство остатка. (стр. 21). Приведена особая глава о четырехъ дѣйствіяхъ въ совокупности, въ которой авторъ даетъ понятіе о задачѣ, ея рѣшеніи, и о примѣненіи скобокъ, для иллюстраціи чего приводитъ таблицу всѣхъ возможныхъ примѣровъ изъ 2, 3 и 4 данныхъ чиселъ (стр. 61). Приведены свойства О. Н. Д. (стр. 108) и О. Н. К. (стр. 112). Дѣленію на дробь дается двойкій смыслъ: нахожденіе неизвѣстнаго по извѣстной его части и сравненіе (стр. 145).

Имѣется глава о дробяхъ съ дробными числителями и знаменателями (стр. 150). Послѣ § о сравненіи десятичныхъ дробей, дается понятіе о приближенныхъ дробяхъ и о мѣрѣ точности при этомъ (стр. 165). Въ дѣленіи десятичныхъ дро-

бей приведенъ случай дѣленія съ помощью простыхъ дробей (стр. 171). Отношеніе опредѣляется какъ два сравниваемыхъ числа, между которыми находится знакъ дѣленія (стр. 193). Въ главѣ о пропорціональныхъ величинахъ дается понятіе постоянныхъ и переменныхъ величинахъ (стр. 205).

Особенности второго изъ названныхъ учебниковъ—«Систематическаго курса арифметики»—Кюрзена, заключаются въ слѣдующемъ.

Послѣ каждого отдѣла имѣются вопросы, исчерпывающіе матеріалъ предшествующаго имъ отдѣла. Дѣйствія обосновываются истинами (теоремами), выражающими, положимъ, д. суммы, перемѣстительное, сочетательное и т. п. свойства. Однако, эти истины формулируются иногда весьма своеобразно такъ, для вычитанія авторъ приводитъ такую истину: «если два числа разложены на одинаковое число частей такъ, что части меньшаго числа не превышаютъ соответственныхъ частей большаго, то разность этихъ чиселъ равна суммѣ разности соответствующихъ частей» (стр. 43). Вычитаніе многозначныхъ чиселъ авторъ объясняетъ (исходя изъ того, что увеличеніе уменьшаемаго и вычитаемаго на одно и то же число нѣмѣняетъ разности) такъ:

$$\begin{array}{r} 9 \ 3 \ 5 \ 4 \\ - \ 3 \ 7 \ 8 \ 9 \\ \hline 5 \ 5 \ 6 \ 5 \end{array}$$

т. е. девять изъ четырнадцати — пять; т. к. мы прибавили 10 къ уменьшаемому, то прибавляемъ 10 и къ вычитаемому т. е. вычитаемъ 9 (вмѣсто 8-ми) изъ 15-ти, получаемъ 6 изъ 13-ти—5 и т. д. *) (стр. 49). Послѣ вычитанія дается понятіе о сравненіи двухъ чиселъ въ разностномъ и кратномъ отношеніяхъ (стр. 53). Примѣняется округленіе дѣлителя и дѣленія (стр. 101). Подробно перечисляется въ какихъ случаяхъ (числомъ 5) употребляется устное и письменное дѣленіе (стр. 108).

Дробь опредѣляется двояко: съ одной стороны дробь есть некоторое число одинаковыхъ долей единицы, съ другою

*) Такое объясненіе приводится у Брэя въ его «Арифметикѣ».

частное. Въ главѣ объ отношеніяхъ и пропорціяхъ приведенъ § о рядѣ равныхъ отношеній и указано примѣненіе ихъ къ пропорціональному дѣленію. Въ курсѣ въ соответствующихъ главахъ приведены историческія справки о знакахъ дѣйствій, о мѣрахъ, о деньгахъ, о времени и т. п. Имѣется глава о торговлѣ и товариществахъ. Въ приложеніи, между прочимъ, обращеніе періодической дроби въ обыкновенную объясняется, какъ нахожденіе предѣла періодической дроби. Тутъ же дается понятіе о непрерывныхъ дробяхъ и объ ирраціональномъ числѣ. Примеромъ ирраціональнаго числа авторъ дастъ... десятичную періодическую дробь (§ 435). Въ разныхъ частяхъ курса разбросаны (болѣе 40) типичныя задачи съ подробнымъ анализомъ и планомъ ихъ рѣшенія, причемъ этимъ задачамъ даны опредѣленія...

Перехожу къ «Арифметикѣ» Сахарова. Главная особенность этого учебника состоитъ въ томъ, что авторъ его помѣстилъ болѣе методическимъ главу о десятичныхъ дробяхъ непосредственно за ученіемъ о цѣлыхъ числахъ, а затѣмъ уже говорить о дробяхъ обыкновенныхъ. Остальныя особенности выражаются въ слѣдующемъ.

Съ самаго начала курса выясняется понятіе о величинѣ, какъ о томъ свойствѣ предмета, которое можетъ измѣняться, увеличиваясь или уменьшаясь.

Дѣйствія обосновываются аксіомами, выражающими свойства суммы, разности и т. д. Статья объ именованныхъ числахъ начинается историческимъ очеркомъ о происхожденіи мѣръ. Въ числѣ мѣръ приведены также мѣры дугъ и угловъ. Статья о рѣшеніи задачъ на время разработана подробно, чѣмъ это вообще принято, строгимъ разграниченіемъ календарныхъ чиселъ и именованныхъ чиселъ времени. Въ этой же статьѣ приведена кривая зависимости продолжительности дня отъ времени года, а въ задачахъ на время—таблица, показывающая порядокъ дня отъ начала года, въ зависимости отъ числа и мѣсяца.

Въ мѣрахъ площадей приведены наиболѣе употребительныя плоскія фигуры, въ мѣрахъ объема—многогранники.

За цѣлыми числами, какъ упомянуто выше, слѣдуетъ

глава о десятичныхъ дробяхъ, которыя разсматриваются, какъ далѣйшее развитіе десятичной системы счисленія. Въ этой же главѣ дается понятіе о процентѣ, которое и примѣняется на соответствующихъ примѣрахъ. Послѣ статьи о періодическихъ дробяхъ очень кратко говорится о приближенныхъ вычисленияхъ. Въ дополнительныхъ статьяхъ, слѣдующихъ послѣ ученія объ обыкновенныхъ дробяхъ, дается историческій очеркъ о возникновеніи метрической системы, сама система и выясняются ея выгоды; далѣе дается понятіе объ извлеченіи корня.

Здѣсь же дается понятіе объ ирраціональномъ числѣ. Въ отношеніяхъ и пропорціяхъ теоремы доказываются уже на общемъ числѣ. Далѣе идетъ статья о пропорціональныхъ рядахъ, изъ ученія о которыхъ выводятся, какъ частные случаи, производныя пропорціи и рѣшаются задачи на пропорціональное дѣленіе. Здѣсь же въ статьѣ о пропорціональныхъ величинахъ дается понятіе о постоянныхъ и переменныхъ величинахъ и о функціональной зависимости двухъ переменныхъ. Въ концѣ приведена статья о торговлѣ съ правилами товарищества, процентовъ и учета лекселей.

Отдѣльно отъ перечисленныхъ учебниковъ стоятъ два учебника: «Арифметика» — Эмиля Бореля, первый циклъ, переводъ съ французскаго, Москва, 1910 г. и та же арифметика Бореля въ обработкѣ Штеккеля, изданіе Mathesis, Одесса, 1911 г., въ одной книжкѣ вмѣстѣ съ курсомъ алгебры того же Бореля, которые однако могутъ быть отнесены къ той же группѣ учебниковъ. Упомяну о первой книжкѣ, такъ какъ, въ сущности, обработка Штеккеля состояла главнымъ образомъ въ сокращеніи учебника Бореля. (Выпущены статьи о прогрессіяхъ и статьи коммерческой арифметики).

Подчеркнувъ основное условіе письменной нумераціи, Борель устанавливаетъ понятіе о равенствѣ двухъ чиселъ, на основаніи котораго формулируетъ аксіому числа, состоящую въ томъ, что два данныхъ числа либо равны, либо первое больше или меньше второго.

На основаніи этой аксіомы онъ выводитъ положеніе, что два равныхъ числа въ десятичной системѣ изображаются одинаковыми знаками и наоборотъ, и даетъ признакъ, по которому

можно судить о сравнительной величинѣ двухъ чиселъ, написанныхъ по десятичной системѣ.

Дѣйствія обосновываются теоремами. Эти теоремы суть слѣдствія аксіомы числа. Въ сложении эти теоремы выражаютъ перемѣстительное и сочетательное свойства суммы.

Въ вычитаніи доказываются теоремы о вычитаніи суммы и разности и свойства разности. Эти теоремы доказываются на подходящихъ числовыхъ задачахъ.

Въ умноженіи приводятся аналогичныя теоремы.

Разъясняется смыслъ умноженія нуля и на ноль. Обращается вниманіе на смыслъ умноженія въ случаѣ, когда оба сомножителя числа именованыя.

Въ статьѣ о дѣлимости приводятся теоремы о дѣлимости суммы и разности. Въ статьѣ о первоначальныхъ числахъ приведена основная теорема о возможности разложенія всякаго числа только на одно опредѣленное произведеніе первоначальныхъ сомножителей. Дробь разсматривается, какъ результатъ дѣленія.

Опредѣленіе умноженія на дробь не дается.

Дѣленіе опредѣляется, какъ умноженіе на дробь, обратную дѣлителю.

Дается только понятіе о періодической дробѣ.

Въ статьѣ о квадратномъ корнѣ приведены теоремы о квадратѣ суммы, дроби и т. п. Данъ способъ нахожденія приближеннаго квадратнаго корня съ данною степенью точности.

Имѣется статья объ арифметической и геометрической прогрессіяхъ. Выводится сумма первыхъ n нечетныхъ чиселъ, которая доказывается геометрическимъ построеніемъ.

Имѣются статьи коммерческой арифметики.

Изъ учебниковъ второй группы назову: «Учебникъ арифметики съ изложеніемъ методовъ рѣшеній арифметическихъ задачъ»—А. Н. Воробьева, изд. 2-е, Астрахань, 1908 г. и «Курсъ арифметики» В. Иванова (Дубравина). Вып. I-й. Цѣлыя и десятичныя числа. Изд. 1911 г. Псковъ.

Разсмотримъ вкратцѣ сперва «Учебникъ арифметики» Воробьева.

Въ предисловіи къ своей книгѣ авторъ объясняетъ ска-

тость изложенія курса желаніемъ заставить учителя работать въ классѣ и облегчить ученику домашнюю работу, не уменьшая при этомъ ни научности, ни полноты курса.

Насколько удалось автору достигнуть своей цѣли, рѣшать не буду, а приведу только нѣсколько выдержекъ изъ его курса.

Такъ, напримѣръ, при сокращеніи дробей, авторъ, не говоря ни слова о разложеніи на множители, въ § 142 пишетъ:

$$\text{«Число } 504 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 14\text{» (стр. 33).}$$

На стр. 37 авторъ даетъ такое опредѣленіе умноженію на дробь: «Умножить к. н. число на $\frac{3}{7}$, значитъ взять его слагаемыя $\frac{3}{7}$ раза, т. е. не 1 разъ, а только $\frac{3}{7}$ раза... и т. д. въ такомъ же родѣ.

Главная особенность курса, сложность, доведена до различнаго рода таблечекъ, схемъ, условныхъ обозначеній для разъясненія которыхъ учителю дѣйствительно придется много поработать въ классѣ. Приведу два примѣра.

Такъ, для выраженія «измѣненія результатовъ дѣйствій отъ измѣненія факторовъ» приведена такая схема:

дсл.	1 сл.	И сл.	см.	дсм.
	6	+	5	= 11
+7	13	+	5	= 18
+5	17	+	5	= 22
ув.	изм.	пост.	изм.	ув.

$$\text{дсл.} = \text{дсм. (§ 73).}$$

Зависимость суммы и слагаемыхъ выражена такъ:

I сл.	II сл.	—	—	—
			сумма	прямая разн. зав.
				обратная разн. зав. (§ 79).

и т. п.

Для перехода отъ ученія о цѣлыхъ числахъ къ десятичнымъ дробямъ удѣлена одна страница для обыкновенныхъ дробей.

Давъ понятіе о приближенномъ значеніи десятичной периодической дроби, авторъ безъ дальнѣйшихъ оговорокъ перехо-

дѣлать къ четыремъ дѣйствіямъ съ періодическими дробями (стр. 40).

Много мѣста отводитъ авторъ въ своемъ учебникѣ рѣшенію задачъ, преимущественно методомъ предположенія, который авторъ считаетъ пропедевтикой къ рѣшенію задачъ помощью уравненій и вообще отдаетъ ему предпочтеніе передъ всякими другими.

Эта сторона учебника разработана авторомъ подробнѣе и лучше другихъ отдѣловъ, почему и представляетъ наибольшій интересъ; однако задачи приводимыя авторомъ содержатъ иногда очень замысловатые условія.

Другая изъ названныхъ книгъ, «Курсъ арифметики» — В. Ивалова (Дубравина) отличается еще большею сложностью. Обнимая собою всего 67 страницъ обычнаго формата учебника, «курсъ» включаетъ въ себя курсъ арифметики (за исключеніемъ отдѣла объ обыкновенныхъ дробяхъ), ученіе объ отрицательныхъ числахъ и дѣйствія съ цѣлыми алгебраическими выраженіями. Короче «курсъ» имѣетъ характеръ не конспекта даже, а скорѣе сборника правилъ для производства дѣйствій, т. е. многія изъ нихъ ничѣмъ не обосновываются.

Такъ авторъ, на 2-й страницѣ, находитъ возможнымъ, въ главѣ о письменномъ счисленіи, дать понятіе о десятичномъ числѣ и далѣе всѣ дѣйствія разсматриваетъ одновременно съ цѣлыми и десятичными числами. На 23 страницѣ, въ статьѣ о порядкѣ дѣйствій, дается понятіе и объ отрицательномъ числѣ. Обративъ вниманіе, что при вычитаніи можетъ встрѣтиться случай, когда изъ меньшаго числа придется вычитать большее, напримеръ $4 - 7$, авторъ говоритъ: «ясно, что дѣйствіе невозможно, но чтобы не дѣлать передъ этимъ остановки, условились въ этомъ случаѣ записывать невыполненное вычитаніе, пишутъ $4 - 7 = -3$, т. е. слѣдуетъ отнять еще 3. Такія числа называются отрицательными, а всѣ остальные положительными». Дальнѣйшаго расширенія понятія объ отрицательномъ числѣ въ «курсѣ» не имѣется.

Въ статьѣ объ умноженіи дается понятіе о приближенномъ умноженіи, а затѣмъ указаны правила первыхъ трехъ дѣйствій съ одночленами и многочленами. Въ дѣленіи

приводится примѣръ бесконечнаго дѣленія, дается понятіе о періодическомъ десятичномъ числѣ, и далѣе всѣ четыре дѣйствія производятся съ десятичными числами точно или приближенно, въ зависимости отъ того, конечная или бесконечная десятичная дробь получается во время дѣйствій. Такимъ путемъ авторъ исключаетъ весь отдѣлъ ученія о простыхъ дробяхъ изъ своего курса. Этимъ нечернивается характеръ учебника г. Иванова.

Въ заключеніе нахожу не лишнимъ упомянуть о двухъ книжкахъ, которыя, по крайней мѣрѣ по заглавію, имѣютъ отношеніе къ курсу ариѳметики младшихъ классовъ.

Говорю «по заглавію», т. к. къ сожалѣнію болѣе полныхъ свѣдѣній дать не могу, умолчать же объ нихъ не считаятъ себя въ правѣ: эти книги затрагиваютъ назрѣвшіе вопросы и потому, независимо отъ ихъ достоинства, вызываютъ къ себѣ извѣстный интересъ. Одна изъ нихъ «Введеніе въ алгебру (арифметическая подготовка)»—И. Палова и Т. Сотеренко, изд. 1910 г. Одесса; другая—«Опытъ приложенія графики въ области преподаванія начальной ариѳметики»—Каминскаго, изд. 1909 г. Кременчугъ».

IV. Обзоръ 4-хъ учебниковъ по ариѳметикѣ.

Докладъ Л. П. Тяпкиной (Сиб.).

«По порученію предсѣдателя первой секціи М. Г. Попруженко я рассмотрѣла четыре учебника ариѳметики:

1.—Б. Чиханова. Учебникъ ариѳметики (курсъ среднихъ учебныхъ заведеній), 7-е изд., (142 стр.), Минскъ. 1912 г., ц. 60 коп.; (6-е изд. Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія допущено, какъ руководство для среднихъ учебныхъ заведеній Министерства).

2.—А. Гумермана (препод. Торговой Школы). Краткій курсъ ариѳметики (для городскихъ училищъ и младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній). Сиб., 1911 г., (121 стр.). ц. 30 коп.

3.—*М. Хрущинскаго* (препод. Коммерческаго училища въ Спб.). Краткій учебникъ ариметики (курсы I, II и III кл. среднихъ учебныхъ заведеній) Спб., 1911 г., (135 стр.), ц. 70 коп.

4.—*К. Н. Раинескино* (препод. Московскаго реальнаго училища). Краткій курсъ ариметики (для среднихъ учебныхъ заведеній), 3-е изд., (94 стр.). Москва, 1911 г., ц. 30 коп.

Учебникъ Чиханова отъ обычныхъ систематическихъ курсовъ отличается тѣмъ, что содержитъ, кромѣ полнаго основнаго курса, особенности котораго будутъ указаны ниже, рядъ историческихъ свѣдѣній и нѣсколько интересныхъ добавочныхъ статей:

1. — Приближенные вычисленія ($5\frac{1}{2}$ стр.). На примѣрахъ разъясняются правила нахожденія суммы, разности, произведенія и частнаго съ данною степенью точности.

2. — Арифмометры (2 стр.). Дается краткое описаніе арифмометра Однера (изобраз. въ треть своей величины) и объясняется, какимъ образомъ производится на немъ вычисленіе произведенія: 89026×17612 .

3. — Общій обзоръ арифметическихъ дѣйствій (2 стр.). Образованіе натурального ряда чиселъ и его свойства. Опредѣленіе суммы. Обоснованіе дѣйствій: сложенія, умноженія и возвышенія въ степень на понятіи суммы. Противопоставленіе каждому изъ вышеупомянутыхъ дѣйствій двухъ обратныхъ.

4. — Происхожденіе и развитіе понятія о числѣ (1 стр.). Краткая исторія развитія первоначальныхъ арифметическихъ знаній.

5. — Къ ученію объ именованныхъ числахъ ($2\frac{1}{2}$ стр.). Допустимость именованнаго множителя.

Особенности основнаго курса:

1) Кромѣ описанія различныхъ системъ счисленія, приводятся обозначенія нѣсколькихъ чиселъ по двоичной системѣ, описанной въ книгѣ «Іекимъ», приписываемой древнѣйшему Китайскому императору Фохп.

2) Опредѣленію дѣйствія сложенія, какъ чиселъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ, предшествуетъ опредѣленіе суммы.

3) Послѣ обычнаго способа вычитанія многозначныхъ чиселъ указывается способъ вычитанія путемъ дополненія единицъ каждаго изъ разрядовъ вычитаемого до числа единицъ соответствующаго разряда умняемаго.

4) Повѣрка «числомъ 9» дѣйствій сложенія и вычитанія.

5) Описаніе индусскаго способа умноженія.

6) Предложенный Коши способъ для производства дѣйствія умноженія и его повѣрки.

7) Способъ дѣленія помощью дополненій.

8) Въ отдѣлѣ, озаглавленномъ «особенности при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ», помѣщены рѣшенія нѣсколькихъ задачъ способами названными: способомъ предположенія, способомъ приведенія къ единицѣ, способомъ отношеній, способомъ сравненія оборотовъ, способомъ подстановки.

9) Выводъ признака дѣлимости на 9 основывается на предварительномъ разъясненіи, что всякое число равно кратному 9, сложенному съ суммою его цифръ.

10) Послѣ обычнаго вывода всѣхъ признаковъ дѣлимости указано, какимъ образомъ наиболѣе употребительные признаки дѣлимости могутъ быть выведены довольно просто и однообразно изъ равенства:

$$N = a + 10b + 100c + \dots$$

11) Указывается свойство всякаго первоначальнаго числа, уменьшеннаго или увеличеннаго на единицу, дѣлиться на 6.

12) Способъ повѣрки умноженія и дѣленія числомъ 9 и 11.

13) Въ отдѣлѣ дѣйствій съ дробными именованными числами для рѣшенія примѣра и двухъ задачъ примѣняется раскладочный способъ умноженія, называемый также итальянскимъ или Вельта.

14) Въ отдѣлѣ умноженія десятичныхъ дробей приводится способъ расположенія вычисленій, предложенный Лагранжемъ.

15) Въ отдѣлѣ «тройныя правила» указывается, какъ избѣжать тѣхъ несообразности, къ которымъ приводитъ рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ этого типа способомъ приведенія къ единицѣ.

16) Въ статьѣ о процентахъ и учетѣ векселей даются свѣдѣнія изъ Коммерческой ариметики (вычисленіе процентныхъ денегъ способомъ процентныхъ нумеровъ, понятія объ акціяхъ, облигаціяхъ и др. проц. бумагахъ, биржи, банки).

17) Въ концѣ книги помѣщены: таблица разложенія на первоначальныхъ дѣлителей нѣкоторыхъ составныхъ чиселъ, таблица первоначальныхъ чиселъ (1—2000) и таблицъ для вычисленія сложныхъ процентовъ.

Учебники Тумермана и Хрущинскаго носятъ названія «Краткихъ курсовъ» и отличаются отъ «систематическихъ», главнымъ образомъ, тѣмъ, что не содержатъ тѣхъ дополнительныхъ статей теоретическаго курса ариметики, которыя проходятся въ старшихъ классахъ (кроме того и въ систематическихъ курсахъ печатаются обыкновенно мелкимъ шрифтомъ). Оба эти учебника заключаютъ въ себѣ всѣ основныя опредѣленія и правила ариметики съ объясненіями и примѣрами, а также и рѣшенія задачъ на тр. пр., проц., учетъ векс., проп. дѣл., цѣнное пр. и смѣшеніе; ничѣмъ существеннымъ въ изложеніи этого матеріала они не отличаются отъ обычныхъ курсовъ; можно указать только на нѣкоторыя особенности въ деталяхъ.

Такъ въ учебникѣ Тумермана:

1) Вопросъ объ измѣненіи суммы, разности, произведенія и частнаго выдѣленъ въ особую главу, причемъ разсматриваются измѣненія суммы и разности не только при измѣненіяхъ данныхъ чиселъ на нѣсколько единицъ, но и въ нѣсколько разъ, а измѣненія произведенія не только при измѣненіяхъ множимаго и множителя въ нѣсколько разъ, но и при измѣненіи ихъ на нѣсколько единицъ.

2) Подробно излагаются отношенія и пропорціи, какъ геометрическія, такъ и ариметическія.

3) Для наглядности характеръ пропорціональности между капиталомъ, проц. таксой, срокомъ и проц. деньгами изображается на чертежѣ, который легко запоминается. Для рѣшенія

задачъ на проц. составляются и формулы, опредѣляющія каждую изъ величинъ черезъ остальные.

4) Приложение содержитъ главы:

- a) Различныя системы счисления.
- b) Упражненія для усвоенія метрической системы мѣръ.
- c) Вопросы для повторенія, исчерпывающіе въ порядкѣ изложенія курса все его содержаніе до мельчайшихъ подробностей.

Въ учебникѣ Хрущинскаго:

1) Каждое изъ 4-хъ дѣйствій надъ цѣлыми отвѣченными числами излагается такъ:

- a) Опредѣленіе.
- b) Зависимость между данными и искомымъ.
- c) Свойства искомаго числа.
- d) Дѣйствія надъ однозначными числами.
- e) Обоснованіе и выводъ правила дѣйствія для многозначныхъ чиселъ.

f) Примѣненіе дѣйствія.

2) Для наглядности на отрѣзкахъ прямыхъ иллюстрируется:

- a) Сравненіе дробей съ одинаковымъ числителемъ.
- b) Сравненіе дробей съ одинаковымъ знаменателемъ.
- c) Измѣненіе величины дробей съ измѣненіемъ ея членовъ.

d) Незмѣняемость величины дробей при приведеніи ея къ иному знаменателю.

3) За отдѣломъ: «Цѣлыя именованныя числа и дѣйствія надъ ними» слѣдуетъ отдѣлъ: «Подраздѣленіе задачъ на типы и способы рѣшенія ихъ» (9 страницъ). Въ предисловіи къ учебнику авторъ пишетъ, что онъ вводитъ этотъ отдѣлъ потому, что придаетъ большое значеніе «умѣнію рѣшать задачи», а этого, по его мнѣнію, можно достигнуть не количествомъ рѣшенныхъ задачъ, но систематическимъ изученіемъ встречаемыхъ чаще типовъ.

Отдѣлъ этотъ распадается на слѣдующіе параграфы:

1) Зависимость между величинами; задачи: простыя и сложныя.

2) Выводныя задачи (6 группъ).

3) Задачи на предположеніе (6 группъ).

Въ каждой группѣ одинъ или нѣсколько типовъ; всѣ типы перечисляются, но не приводится ни одной задачи съ числами, а лишь указывается, какія величины задаются и какіе вопросы составляются для рѣшенія.

Напримѣръ, одинъ изъ типовъ таковъ: «Дается: 1) разстоянія, проходимыя каждымъ лицомъ или тѣломъ въ опредѣленное время; 2) время, по истеченіи котораго одно лицо или тѣло догнало другое; отыскивается: первоначальное разстояніе, отдѣляющее двухъ лицъ. Составляютъ вспомогательныя задачи: 1) Найти разстояніе, проходимое каждымъ лицомъ или тѣломъ въ единицу времени (2 вопр.); 2) узнать разницу въ скоростяхъ; 3) опредѣлять первоначальное разстояніе, отдѣляющее двухъ лицъ, два движущихся тѣла.

Учебникъ Рашевскаго, первое изданіе котораго носило названіе: «Правила и опредѣленія ариметики» отличается отъ другихъ «краткихъ курсовъ ариметики» для младшихъ классовъ среднихъ учебныкъ заведеній. Выпущены длинныя правила, какъ нумерація, такъ и дѣйствій съ многозначными отвлеченными и составными именованными числами. Дается лишь таблица съ распредѣленіемъ разрядовъ по классамъ и рѣшаются примѣры на каждое дѣйствіе. Правила для нахожденія наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго даются безъ доказательствъ, перечисляются лишь основныя истины, на которыхъ основывается дѣлимость чиселъ. Нахожденіе части отъ числа и числа по его части разсматриваются уже послѣ дѣйствій умноженія и дѣленія на дробь, а потому и рѣшаются прямо этими дѣйствіями.

Изъ дѣйствій съ дробными именованными числами приводится только рѣшеніе двухъ простыхъ примѣровъ: на превращеніе и раздробленіе.

Опредѣленію процента въ коммерческомъ смыслѣ предшествуетъ общее опредѣленіе процента, какъ сотой доли, обращается вниманіе на то, какую часть даннаго числа составляютъ: 50%, 25%, 75% и т. п.

Выраженія:

$$\begin{array}{lll} 0 \times 25 = 0; & 25 \times 1 = 25; & 5 : 1 = 5 \\ 25 \times 0 = 0; & 1 \times 25 = 25; & 5 : 5 = 1 \end{array}$$

выдѣлены въ особый параграфъ, какъ особые случаи умноженія и дѣленія.

Вопросу о постановкѣ наименованій отводится отдѣльная статья, въ которой подчеркивается, что множитель всегда долженъ быть отвлеченнымъ числомъ, но предлагается, для удобства вычисленій, записывать иногда множитель надъ множимымъ.

Такъ, наиримѣръ:

$$\begin{array}{rcl} 354 \text{ руб.} & & \text{множитель} \\ \times 4 \text{ »} & & \text{множимое} \end{array}$$

1416 руб.

Отдѣлъ дѣйствій надъ обыкновенными и десятичными дробями заканчивается главами: о приближенномъ частномъ, обращеніемъ обыкновенныхъ дробей въ десятичныя, обращеніемъ періодическихъ дробей въ обыкновенныя. Последняя глава: «Приложеніе арифметики» содержитъ краткія свѣдѣнія о геометрическомъ отношеніи и пропорціяхъ.

Затѣмъ приводятся рѣшенія простѣйшихъ задачъ на правила: тройное (простое и сложное), проценты, пропорціональное дѣленію и смѣшеніе.

Все опредѣленія и правила напечатаны курсивомъ. Чтобы обратить вниманіе ученика на тѣ выраженія въ нихъ, которыя должны быть особенно отиѣнены, эти послѣднія отпечатаны болѣе жирнымъ шрифтомъ, что придаетъ изложенію особую выпуклость.

V. Обзоръ литературы на русскомъ языкѣ по методикѣ ариометики.

Докладъ¹⁾ В. Р. Мрочекъ (Сиб.).

«По порученію Организационнаго Комитета имѣю честь предложить вниманію собравшихся обзоръ литературы на русскомъ языкѣ по вопросамъ преподаванія ариометики.

Подъ «методикой ариометики» обыкновенно подразумеваются тѣ ходячія книжки, въ которыхъ разсматриваются вопросы обученія ариометикѣ въ русскихъ начальныхъ школахъ. Громадное большинство авторовъ совершенно не касается при этомъ вопросовъ дидактики и все свое вниманіе устремляетъ на разработку деталей курса. При этомъ, конечно, имѣется въ виду лишь начальная школа, а о существованіи школъ другихъ типовъ, гдѣ тоже проходитъ ариометика, авторы повидимому забываютъ.

Въ настоящее время педагогика математики существуетъ, какъ самостоятельная научная дисциплина; ея задача—«классифицировать²⁾ собранный математическій матеріалъ, отдѣлить общедоступные элементы отъ предметовъ роскоши, найти средства и пути для сообщенія этихъ элементовъ наибольшему числу лицъ при наименьшей затратѣ индивидуальныхъ усилий ума и воли».

Отсюда слѣдуетъ, что къ каждому отдѣлу математики, предназначенному для школы, необходимо предъявлять подобныя же требованія. Такъ, прежде чѣмъ приступить къ методикѣ отдѣльныхъ частей ариометики, необходимо обосновать: 1) цѣль школьной ариометики, 2) ея мѣсто въ ряду другихъ учебныхъ предметовъ, 3) ея содержаніе въ связи съ тѣмъ или инымъ типомъ школы, 4) планъ распределенія матеріала по годамъ обученія, 5) распределеніе матеріала по отдѣльнымъ

¹⁾ Настоящій докладъ представляетъ конспективное изложеніе одной главы изъ готовящихся къ печати моихъ «Лекцій по педагогикѣ ариометики».

²⁾ В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ, Педагогика математики, т. I, 1910, стр. 2.

періодамъ школьнаго года и 6) главные методы разработкы ариметики въ школѣ. При такомъ обоснованіи приходится постоянно опираться какъ на эволюцію ариметики научной, такъ и на многочисленныя экспериментально-научныя изслѣдованія въ области школьной ариметики и ея методики; приходится опираться на экспериментальную педагогику, дѣтскую психологію, психофизиологію и гигиену; наконецъ, приходится считаться и съ чисто социальными проблемами, какъ-то: назначеніе школы того или иного типа, общеобразовательныя или утилитарныя тенденціи, доступность школы для тѣхъ или иныхъ классовъ общества и т. п.

При разработкѣ вопросовъ школьной ариметики необходимо, кромѣ того, имѣть въ виду еще: а) исторію развитія ариметики у отдѣльныхъ народовъ и у всего человѣчества, б) ея неизбѣжныя и непосредственныя приложенія во внѣшкольной жизни.

Пользуясь установленнымъ масштабомъ, я рассмотрю существующую на русскомъ языкѣ литературу по методикѣ ариметики.

Въ существующей методической литературѣ можно различать три направленія: эмпирическое, переходное и экспериментальное.

А. Эмпирическое направленіе.

Въ основу построенія методики положены не научныя, дидактическіе и психологическіе принципы, а «голый опытъ». Каждый изъ авторовъ добавлялъ свои эмпирическія крупинки къ той массѣ крупницъ, которая составила до него труды отдѣльныхъ эмпириковъ XVIII и XIX столѣтій. Отдѣльныя детали часто вѣрны; нѣкоторыя замѣчанія практическаго характера предвосхищаютъ выводы экспериментальной дидактики; но общій характеръ изложенія совершенно не удовлетворяетъ поставленнымъ выше требованіямъ.

Къ этому направленію принадлежатъ:

- 1) *Аржениковъ, К. П.* Методика начальной ариметики.
- 2) *Белюстинъ, В. К.* Методика ариметики.

3) *Вишневскій, Г. М.* Записки по методикѣ элементарной ариметики.

4) *Гольденбергъ, А. И.* Методика ариметики.

5) » » Бесѣды по счисленію.

6) *Евтушевскій, В.* Методика ариметики.

7) *Житковъ, С. В.* Методика ариметики.

8) *Куперштейнъ, В. М.* Записки по методикѣ ариметики.

9) *Латышевъ, В. А.* Руководство къ преподаванію ариметики.

10) *Лубенскій, Т.* Методика ариметики.

11) *Павловъ, М.* Методика ариметики.

12) *Шохоръ-Троцкий, С. И.* Методика ариметики.

и др.

В. Переходное направленіе.

Авторы второй категоріи въ большинствѣ случаевъ уже знакомы съ новой постановкой вопроса; они отчасти вводятъ экспериментальныя изслѣдованія, отчасти считаются съ научными данными; нѣкоторые изъ нихъ обращаютъ вниманіе и на исторію вопроса.

Сюда относятся:

13) *Дожъ, Ф.* Методологія ариметики, пер. съ франц., 1886 г.

14) *Енко, П.* Лабораторный методъ обученія начальному счету, 1911.

15) *Литвинскій, П. А.* Изученіе ариметики дѣтьми, 1908.

16) *Мукаловъ, Н.* Записки по методикѣ ариметики, 1910.

17) *Шохоръ-Троцкий, С. И.* Методика ариметики. Для учителей средн. уч. заведеній, 1912.

18) *Штеклинъ, І.* Методика ариметики, пер. съ нѣм. Ч. I, 1911, ч. II, 1912.

и др.

С. Экспериментальное направление.

Пока единственнымъ крупнымъ представителемъ научно поставленной методики ариометрики является Лай, книга котораго переведена на русскій яз. Къ сожалѣнію, въ книгѣ Лая разработаны лишь вопросы, относящіеся къ обученію ариометикѣ въ предѣлахъ перваго десятка и намѣчены детали разработки первой сотни и тысячи. Но общій планъ изслѣдованія, обоснованіе начальныхъ принциповъ, широкое примѣненіе экспериментальнаго метода—все это ставитъ книгу Лая въ образецъ всѣмъ дальнѣйшимъ авторамъ методикъ.

Изъ русскихъ авторовъ необходимо отмѣтить Галанкина, книга котораго вышла въ трехъ частяхъ; третья часть содержитъ попытку болѣе широкаго обоснованія методики.

Изъ иностранныхъ авторовъ, писавшихъ специально по ариометикѣ, переведены Герляхъ и Вентвортъ и Ридъ. Книжка Герляха характерна среди нѣмецкихъ методикъ: вмѣсто скучнѣйшихъ деталей и утомительныхъ разжевываній она даетъ общую схему положенія и на этомъ фонѣ, какъ отдѣльныя иллюстраціи, являются тѣ или иные детали курса. Американскій же учебникъ Вентворта и Рида задается чисто практическими цѣлями: дать хорошо проработанный матеріалъ, съ которымъ учитель справится самъ. Методика тѣхъ же авторовъ—это расширенный ихъ же учебникъ. Такое направленіе американскихъ методистовъ станетъ понятнымъ, если вспомнить, что еще въ 1907 г. было 528 кафедръ педагогики въ Университетахъ, Колледжахъ и Учительскихъ Институтахъ и Семинаріяхъ Соед. Штатовъ; весь центръ тяжести подготовки учительскаго персонала переносится на учебныя заведенія. Въ Россіи до сихъ поръ каждый практикъ долженъ самъ заботиться о своемъ профессионально-педагогическомъ образованіи.

Въ нижеслѣдующемъ перечнѣ я укажу не только книги по методикѣ математики вообще, но и тѣ журнальныя статьи, въ которыхъ отразились новыя теченія въ области школьной ариометрики. Въ настоящее время «учитель ариометики»—это пережитокъ старины. Книги Клейна, Лезана, Юнга и др. показываютъ, чѣмъ долженъ заниматься учитель на урокахъ ариометики, что онъ долженъ знать самъ и чему учить другихъ.

19) *Алексеевъ, В.*, проф. Учебникъ разумной математики, Вышній Волочекъ, 1908, ч. 1 р. 20 к.

20) *Вигнхат*, проф. Гигіена ариметики, какъ учебнаго предмета, пер. съ англ. Журналъ «Народное Образование», 1911, кн. 7 и 8.

21) *Вентвортъ и Ридъ*, Начальная ариметика, ч. I и II, пер. съ англ. подъ ред. В. Р. Мрочека, изд. «Новая Школа», Спб. 1911, ч. 60 к.

22) *Галанингъ, Д.* Методика ариметики, и Введеніе, 1910—11, ч. 1 р. 80 к.

23) *Герляхъ, А.* Какъ преподавать дѣтямъ ариметику въ духѣ творческаго воспитанія, пер. съ нѣм., 1910—11, ч. 35 к.

24) *Клейнъ, Ф.* проф. Вопросы элементарной и высшей математики, т. I, пер. съ нѣм., 1912, ч. 3 р.

25) *Лай, В. А.* Руководство къ первоначальному обученію ариметикѣ, основанное на результатахъ дидактическихъ опытовъ, пер. съ нѣм., 1910, ч. 80 коп.

26) *Лезанъ, Шарль*, проф. Введеніе въ математику, пер. съ франц. подъ редак. В. Р. Мрочека, изд. «Герольдъ», Спб. 1912, ч. 30 коп.

27) *Лоджъ, Оливеръ*, проф. Легкая математика, преимущественно ариметика, пер. съ англ., 1909, ч. 1 р. 60 к.

28) *Мрочекъ, В. и Филипповичъ, Ф.* Педагогика математики, т. I, 1910, ч. 1 р. 50 к.

29) *Мрочекъ, В.* Ариметика въ ея настоящемъ и прошломъ. Журналъ «Обновленіе Школы», 1911, кн. I и III.

30) *Пуанкареъ*, проф. Наука и методъ, пер. съ фр., 1910, ч. 1 р. 50 к.

31) *Радосавлевичъ, П.*, пр.-доц. Экспериментальныя изслѣдованія психическихъ процессовъ въ математикѣ, какъ наукѣ и какъ учебномъ предметѣ. Журналъ «Обновленіе Школы», 1911—12—13, кн. 5 и слѣд.

32) *Туфановъ, Ал.* Обученіе ариметикѣ въ предѣлѣхъ перваго десятка. Журналъ «Обновленіе Школы», 1912, кн. 5.

33) *Юнгъ, Дж.*, проф. Какъ преподавать математику? Пер. съ англ., 1912, ч. 3 р.»

Второе засѣданіе

30 декабря 8 час. веч.

Предсѣдательствовалъ Б. Б. Піотровскій.

VI. Современное состояніе курса геометріи въ средней школѣ въ связи съ обзоромъ наиболѣе распространенныхъ учебниковъ.

Докладъ Н. А. Извольскаго (Москва).

«И позволю себѣ начать свой докладъ словами маститаго французскаго ученаго Г. Пуанкаре:

«Чѣмъ объяснить, что многіе умы отказываются понимать математику? Не парадоксально ли это? Въ самомъ дѣлѣ, вотъ наука, которая апеллируетъ только къ основнымъ принципамъ логики. . . . ,—и все же встрѣчаются люди, которые находятъ эту науку темной! И этихъ людей даже большинство! Пусть бы они оказались неспособными изобрѣтать,—это еще допустимо. Но они не понимаютъ доказательствъ, которыя имъ предлагаютъ и т. д.». (Г. Пуанкаре. «Наука и Методъ». Переводъ подъ ред. И. К. Брусиловскаго).

Далѣе Пуанкаре анализируетъ понятіе «пониманіе», и желающіе могутъ найти много интереснаго на страницахъ указанной книги, посвященныхъ «математическому разсужденію».

Но оставимъ Пуанкаре и обратимся къ современному курсу геометріи и къ учебникамъ, которые являются выразителями этого курса, съ цѣлью разобратся, нѣтъ ли въ этомъ курсѣ причинъ, хотя бы отчасти объясняющихъ «непониманіе математики» или, по крайней мѣрѣ, показывающихъ, что благодаря современному состоянію нашего курса геометріи (я го-

ворю только о геометріі) число «непонимающих геометрію» должно увеличиваться.

Необходимо остановиться на фактах, характеризующих проявленія логики въ нашемъ курсѣ геометріі.

Вообще говоря, логика можетъ и должна проявляться въ курсѣ геометріі двояко:

1) въ логичномъ построеніи всего курса, направляемомъ руководящими мыслями, положенными въ основу курса, —это, такъ сказать, внутреннее проявленіе логики;

2) въ видѣ ряда силлогизмовъ, которыми доказываются теоремы.

Полагаю, что я не ошибусь, что авторы нашихъ обычныхъ учебниковъ и все, регулируемое этими учебниками, обученіе геометріі главное вниманіе обращаютъ на второе проявленіе логики. Подтвержденіе этого я вижу во многихъ программахъ, въ которыхъ на первый планъ выдвигается развитіе формальнаго мышленія учащихся.

Съ моей точки зрѣнія первое проявленіе логики въ курсѣ геометріі неизмѣримо цѣннѣе второго. Здѣсь мало, чтобы послѣдующее опиралось на предыдущее, здѣсь надо стремиться къ идеалу стройности курса: введеніе въ курсъ новыхъ объектовъ, комбинированіе ихъ, обобщеніе основныхъ понятій должно быть выполнено по строго логическому плану. Тогда эта сторона курса окажетъ доминирующее вліяніе на развитіе учащихся и вліяніе неизмѣримо большее, чѣмъ отъ проведенія требованій, чтобы все, что не аксіома, доказывалось. Эта стройность плана повлечетъ за собою развитіе у учащихся потребности примѣнять къ изученію геометріі логику; навыкъ въ построеніи силлогизмовъ само-собою, безъ навязыванія его учащимся, займетъ въ курсѣ надлежащее мѣсто, такъ какъ учащіеся сами почувствуютъ и необходимость формальной логики и пользу ея.

Несмотря на то, что авторы нашихъ учебниковъ большее вниманіе обращаютъ на второе проявленіе логики, все же, какъ это ни удивительно, имѣются вкоренившіяся въ нашъ курсъ геометріі ошибки даже и противъ этого проявленія логики.

Къ выясненію этихъ ошибокъ я теперь и приступаю.

II.

Общезвѣстна теорема: «сумма двухъ смежныхъ угловъ равна $2d$ ». Для доказательства этой теоремы пишется рядъ равенствъ, приводится рядъ разсужденій, но оказывается, что здѣсь . . . нѣтъ матеріала для доказательства.

Для выясненія этого наиболѣе удобно перенести вопросъ на строго-логическую почву, отказавшись отъ тѣхъ образовъ, съ которыми мы связываемъ мысль, выражаемую этою «теоремою». Для этой цѣли слѣдуетъ воспользоваться символами.

Имѣемъ классъ объектовъ: a, b, c, d, e, \dots , которые мы называемъ углами и относительно которыхъ надо доказать, что $a + b = 2d$, гдѣ a и b суть два объекта этого класса, особеннымъ образомъ выбранные, а d есть объектъ этого же класса, обладающій особыми признаками.

Всѣ объекты нашего класса удовлетворяютъ слѣдующимъ постулатамъ: 1) постулатъ сложенія: для всякихъ двухъ объектовъ a и b возможно найти въ этомъ же классѣ третій объектъ, называемый суммою двухъ первыхъ, т. е. возможно найти $a + b$; 2) $2d$ значитъ $d + d$; 3) надо перевести образное представленіе смежныхъ угловъ на символы. Обычное опредѣленіе смежныхъ угловъ [смежными углами называются два угла, имѣющіе (общую вершину), одну общую сторону, а двѣ другихъ стороны которыхъ образуютъ одну прямую] въ связи съ образнымъ процессомъ сложенія угловъ возможно перевести на символы въ такой формѣ: въ условіи теоремы даны два такихъ объекта a и b , что ихъ сумма равна нѣкоторому особому объекту c ; 4) надо сдѣлать подобный же переводъ на символы для прямого угла, обозначаемого знакомъ d . «Прямымъ угломъ называется одинъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ угловъ», т. е. символъ d есть такой особенный объектъ нашего класса, что $d + d = c$ (на основаніи 3) или (на основаніи 2) $2d = c$.

Все доказательство сводится тогда къ тому, что къ двумъ даннымъ посылкамъ: $a + b = c$ и $2d = c$ надо присоединить третью: два объекта (обыкновенно говорятъ «двѣ величины»),

порознь равныя третьему, равны между собою, и заключить отсюда «слѣдовательно $a + b = 2d$ ».

Но въ нашихъ наиболѣе распространенныхъ учебникахъ даже и этого дѣлать не приходится. Въ самомъ дѣлѣ, тамъ набѣгается введеніе въ курсъ геометріи того особеннаго угла, который обозначенъ символомъ c (въ нѣкоторыхъ учебникахъ вводится этотъ особенный уголъ, называемый развернутымъ, или выпрямленнымъ, но эти учебники почти не употребляются въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ); разъ этотъ уголъ не входитъ въ курсъ, а взамѣнь его вводятъ лишь одинъ особый уголъ прямой, названный символомъ d , то намъ остается 4-й постулатъ выкинуть, а 3-ій измѣнить: данные въ условіи теоремы символы a и b связаны между собою соотношеніемъ $a + b = 2d$. Что же тогда доказывать? Содержаніе теоремы вовсе исчезаетъ.

А сколько трудовъ затрачиваютъ несчастные ученики—и это въ самомъ началѣ курса,—чтобы быть въ состояніи воспроизвести самимъ доказательство этой теоремы съ нулевымъ содержаніемъ!

Вмѣсто того, чтобы изучать доказательство этой якобы теоремы, слѣдовало бы выполнять рядъ упражненій, приучающихъ учениковъ видѣть сумму двухъ или нѣсколькихъ слугаемыхъ угловъ и показывающихъ, что эта сумма иногда можетъ оказаться выпрямленнымъ угломъ ($2d$).

Такую же дѣйность имѣетъ и обратная теорема, доказательство которой такъ трудно дается учащимся. Понятно теперь, почему? Потому что, въ сущности, здѣсь доказывать нечего, надо лишь видѣть. Здѣсь дѣло еще хуже; чтобы показать это, выписываю эту теорему въ редакціи одного изъ учебниковъ:

«Если сумма двухъ прилежащихъ угловъ DBC и CBA равна двумъ прямымъ, то ихъ внѣшнія стороны DB и BA образуютъ прямую линію; слѣд., эти прилежащіе углы будутъ смежными».

Если ученикъ усвоитъ понятія «прямой уголъ» и «сумма двухъ угловъ», то каково ему читать или слушать начало доказательства: «предположимъ, что DB не будетъ про-

долженіемъ прямой BA и т. д.». Ученикъ выравѣ сказать, что мы не имѣемъ права этого предполагать, такъ какъ дано, что $\angle DBC + \angle CBA = 2d$, а это равносильно тому, согласно опредѣленіямъ суммы угловъ и прямого угла, что DB BA являются продолженіемъ другъ друга. Преподавателю остается затуманить мысль и воображеніе ученика, чтобы заставить его принять предлагаемое доказательство.

III.

Вотъ еще нѣсколько примѣровъ, указывающихъ, что у насъ въ сущности на первомъ планѣ въ курсѣ геометріи не логика, а шаблонъ и традиція.

Во многихъ учебникахъ, слѣдуя Лекандру, принимаютъ за аксіому, что прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.

Нельзя согласиться съ тою формою этой аксіомы, какаю даю выше. Въ самомъ дѣлѣ, сейчасъ же возникаетъ вопросъ, что такое разстояніе между двумя точками; если на эту аксіому смотрѣть, какъ на опредѣленіе понятія о разстояніи, то слѣдовало бы выразить ее въ видѣ: прямолинейный отрѣзокъ, соединяющій двѣ точки, называется разстояніемъ между этими точками.

Изъ текста этой аксіомы (въ томъ ея видѣ, который приведенъ выше) можно еще почерпнуть, что между двумя точками существуютъ разныя разстоянія, изъ которыхъ выбирается кратчайшее; между тѣмъ, никто не назоветъ разстояніемъ земли отъ солнца ломаную или кривую, идущую отъ земли къ Сіріусу, потомъ къ Венерѣ и затѣмъ къ солнцу. Если бы эту фразу сказать въ формѣ: «кратчайшій путь между двумя точками идетъ по прямолинейному отрѣзку, соединяющему эти точки», то противъ такой формы ничего нельзя было бы сказать: форма правильная, но понятіе «путь» не геометрическое и опирается на понятіе о линіи.

Повидимому, если желаемъ разсматриваемую фразу передрѣлать въ аксіому, мы должны это сдѣлать въ слѣдующей формѣ:

1. Аксиома. Прямолинейный отрезокъ, соединяющій двѣ точки, меньше всякой другой линіи, соединяющей тѣ же точки.

Понятіе «меньше» въ примѣненіи къ отрезкамъ уже было выяснено.

2. Определеніе. Въ виду предыдущей аксіомы, прямолинейный отрезокъ, соединяющій двѣ точки, называется разстояніемъ между этими точками.

Интересна еще очень распространенная обратная теорема, которая встрѣчается въ курсѣ геометріи дважды: въ планиметріи и въ стереометріи.

Въ планиметріи доказываютъ прямую теорему: «если изъ точки на прямую опущенъ перпендикуляръ и проведены наклонныя, то перпендикуляръ короче всякой наклонной»; затѣмъ дается обратная теорема, доказательство которой часто предоставляется самимъ учащимся: «кратчайшее разстояніе отъ точки до прямой есть перпендикуляръ».

Попробуемъ примѣнить сюда способъ составленія обратной теоремы изъ прямой, обычно излагаемый въ учебникахъ.

Прямая теорема читается «перпендикуляръ короче всякой наклонной». Слѣдовательно, здѣсь дано: 1) $OA \perp MN$, 2) OB наклонная къ MN ; требуется доказать, что $OA < OB$. Составимъ обратную теорему: одно изъ условій надо помѣнить мѣстомъ съ заключеніемъ. Тогда дано: 1) $OA < OB$ и 2) OB наклонная къ M ; требуется доказать $OA \perp MN$ (?).

Не трудно, если выкинуть въ суть дѣла, а не ограничиваться игрою въ слова, понять, что 2 предложенія: 1) перпендикуляръ короче всякой наклонной и 2) кратчайшая изъ всѣхъ прямыхъ, проведенныхъ изъ точки къ прямой, есть перпендикуляръ—суть выраженія одной и той же мысли и, отнюдь, одно изъ нихъ не обратно другому.

Вотъ еще примѣръ, указывающій, что на первый планъ выдвигается діалектика, а суть дѣла въ загонѣ. Въ курсѣ геометріи Ж. Hadamard'a для доказательства существованія неизмѣримыхъ отрезковъ разсматривается равнобедренный треугольникъ, у котораго уголъ при вершинѣ $= 1\frac{1}{3}d$, вмѣсто классиче-

скаго примѣра діагонали и стороны квадрата. Въ русскихъ учебникахъ также имѣеть мѣсто указанная замѣна, мотивированная соображеніемъ, что въ этомъ примѣрѣ доказательство проще, чѣмъ въ классическомъ.

Къ сожалѣнію, для ученика этотъ примѣръ вовсе не убѣдителенъ, ибо ученикъ въ этомъ мѣстѣ курса еще не умѣетъ дѣлить прямой уголъ на 5 равныхъ частей и осуществить указаннаго равнобедреннаго треугольника не можетъ.

Слѣдуетъ подвергнуть тщательному пересмотру весь нашъ обычный курсъ геометріи и переработать тѣ мѣста его, которыя вызываютъ сомнѣнія. Вотъ еще сомнительное мѣсто курса: при изученіи вопроса объ измѣреніи площади прямоугольника доказываютъ рядъ теоремъ (аналогично ведутъ дѣло и въ вопросѣ объ измѣреніи объема прямоугольнаго параллелепипеда). Не касаясь вопроса о содержаніи этихъ теоремъ, вызывающемъ сомнѣнія, обращаю вниманіе гг. членовъ Съѣзда на то, что здѣсь болѣе умѣстно повѣствовательное изложеніе, гдѣ учащіеся познакомились бы съ творческою работою человѣческой мысли, результатомъ которой явилось сознаніе, что возможно площадь каждаго прямоугольника выразить числомъ.

IV.

Предупредивъ предварительно, что я вовсе не стою за изученіе учащимися опредѣленій основныхъ понятій—моя точка зрѣнія будетъ изложена ниже,—я все же останавлиюсь на изслѣдованіи того, какія системы опредѣленій даются въ нашихъ курсахъ. Я долженъ сдѣлать это потому, что 1) этимъ рядомъ опредѣленій характеризуется внутренняя логичность курса, которой я придаю столь большое значеніе и 2) нѣкоторые изъ учебныхъ программъ обращаютъ вниманіе на то, чтобы ученики усвоили систему опредѣленій. Здѣсь, такъ какъ мнѣ нуженъ рядъ опредѣленій, я долженъ остановиться на отдѣльныхъ учебникахъ; однако я не стану называть ихъ именъ. Буду выбирать лишь учебники, допущенные Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. въ качествѣ руководства для среднихъ учебн. заведеній,

Вотъ рядъ опредѣленій изъ одного новаго учебника, по,

несмотря на новизну, составленнаго въ традиціонномъ направленіи:

1) Въ самомъ началѣ учебника читаемъ: «часть пространства, занимаемая физическимъ тѣломъ, называется его объемомъ или геометрическимъ тѣломъ».

Отсюда мы вправѣ сдѣлать выводъ: Объемъ и Геометрическое тѣло суть понятія тождественныя, откуда слѣдуетъ, что можно говорить лишь объ объемѣ физическаго тѣла, но нельзя говорить объ объемѣ геометрическаго тѣла. Но въ дальнѣйшемъ авторъ забываетъ начало своего учебника, или надѣется, что ученикъ не усвоилъ этого начала и не сумѣетъ сдѣлать указаннаго вывода. Въ самомъ дѣлѣ, въ дальнѣйшемъ, гдѣ изучается вопросъ объ измѣреніи объемовъ, находимъ:

2) Многогранникомъ называется тѣло, ограниченное со всѣхъ сторонъ плоскостями.

3) Какъ извѣстно, пространство, занимаемое тѣломъ называется его объемомъ.

Да, это извѣстно о физическомъ тѣлѣ, но неужели авторъ, говоря далѣе «объемъ многогранника», «объемъ призмы» и т. п. подразумеваетъ физическія призмы, пирамиды и т. п. Такое объясненіе слѣдуетъ отбросить, такъ какъ геометрія не занимается изученіемъ физическихъ тѣлъ. Если бы авторъ сталъ на эту оригинальную точку зрѣнія, то онъ долженъ былъ бы оговорить это въ предисловіи. Остается думать, что авторъ (умышленно или неумышленно) забылъ начало своего учебника. Тѣ же сомнѣнія возникаютъ въ главѣ, гдѣ начинается изученіе тѣлъ вращенія; здѣсь дѣло еще хуже, такъ какъ еще яснѣе, что авторъ подъ именемъ тѣла вращенія понимаетъ геометрическія тѣла. Вотъ, напр., опредѣленіе шара: «тѣло, образованное вращеніемъ полукруга около своего діаметра, называется шаромъ», а «кругомъ называется часть плоскости, ограниченная окружностью» и т. д.,—здѣсь ничего физическаго нѣтъ.

Другой рядъ недоразумѣній возникаетъ на почвѣ слѣдующихъ опредѣленій:

1) Сочетаніе какихъ-нибудь точекъ, линій, поверхностей, тѣлъ, а также каждый изъ этихъ элементовъ въ отдѣльности называется геометрическою фигурою.

2) Многоугольникомъ назыв. часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ прямыми.

Сопоставленіе этихъ опредѣленій позволяетъ заключить: многоугольникъ не есть фигура, между тѣмъ какъ многогранникъ (опредѣленіе цитируется выше) есть фигура, потому что именемъ «фигура» можетъ быть названо тѣло (часть пространства), но не часть плоскости (поверхность, упоминаемая въ опредѣленіи фигуры, совсѣмъ не то же самое, что часть ея). Далѣе имѣемъ еще опредѣленіе:

3) Часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ, называется площадью.

Изъ (2) и (3) опредѣленій вытекаетъ: многоугольникъ есть частный видъ площади; также изъ опредѣленія круга (дано выше) слѣдуетъ: кругъ есть частный видъ площади. Какой же смыслъ имѣютъ встрѣчающіяся далѣе выраженія, «площадь прямоугольника, многоугольника, круга и т. п.»?

Далѣе имѣемъ: «фигуры, хотя и не равныя, но имѣющія равныя площади, назыв. равновеликими».

О какихъ фигурахъ здѣсь рѣчь? Вѣдь многоугольникъ, какъ указано выше, самъ, по мнѣнію автора, есть площадь; объ иныхъ объектахъ, которые можно разсматривать какъ фигуры и относительно которыхъ можно утверждать, что они имѣютъ площадь, въ курсѣ нѣтъ и помину. Да и вообще, что значить «фигура, имѣющая площадь»?

Въ одномъ изъ самыхъ распространенныхъ учебниковъ обращено вниманіе на недоразумѣнія, создающіяся тѣмъ обстоятельствомъ, что часть пространства иногда называютъ просто «тѣло», а иногда «объемъ тѣла» и т. п. и сдѣлана попытка устранить эти недоразумѣнія. Вотъ рядъ выписокъ изъ этого учебника:

1) Всякая ограниченная часть пространства назыв. геометрическимъ тѣломъ.

2) Объемомъ геометрическаго тѣла называется величина той части пространства, которую занимаетъ это тѣло.

Итакъ здѣсь, чтобы отличить опредѣленія тѣла и его объема, вводится слово «величина». Ясно ли значеніе выраженія «величина части пространства»? Мнѣ приходилось слышать,

а можетъ быть и читать гдѣ-либо (сейчасъ не припомню, гдѣ именно), поясненіе этого выраженія: надо разсматривать часть пространства независимо отъ ея формы. Повидимому, многіе преподаватели согласны, что выраженіе «величина части пространства» безъ поясненій, безъ дополненія—туманно, но вышеуказанное поясненіе, предлагающее мыслить опредѣленную часть пространства независимо отъ ея формы, еще усиливаетъ этотъ туманъ. Какъ, въ самомъ дѣлѣ, я могу отказаться отъ формы выдѣленной части пространства? Вѣдь потому лишь я считаю ее опредѣленною частью, что ей придана извѣстная форма.

Въ нѣкоторыхъ учебникахъ ариметики настоятельно проводится мысль о различіи понятій о величинѣ и о значеніи величины. Нельзя не согласиться съ правильностью такого взгляда, а между тѣмъ въ курсѣ геометріи такое различіе не проводится такъ строго, какъ въ ариметикѣ (сравнить, напр., учебники ариметики и геометріи А. Киселева). Если держаться этого различія, то слѣдовало бы опредѣленіе 2-ое пере-дѣлать:

Объемомъ тѣла назыв. значеніе величины «ограниченная часть пространства», которое она принимаетъ для данного тѣла.

Поэтому прежде всего слѣдуетъ установить, что ограниченныя части пространства можно разсматривать какъ величину, т. е. что здѣсь примѣнимы понятія «равно, больше, меньше» и понятіе о суммѣ; затѣмъ надо установить, какъ выбирать значеніе этой величины, соответствующее данному тѣлу. Если тѣло (см. выше данное опредѣленіе 1) есть ограниченная часть пространства, то само тѣло и является значеніемъ нашей величины, соответствующимъ этому тѣлу. Приходимъ опять къ результату, что и здѣсь, несмотря на введеніе слова «величина» (или «значеніе величины»), объемъ тѣла совпадаетъ съ самимъ тѣломъ.

Интересно еще остановиться на понятіи «длина». Обычно это понятіе вовсе не опредѣляется, и вотъ, напр., въ одномъ учебникѣ находимъ §, озаглавленный «соизмѣримыя и несоизмѣримыя длины», но въ этомъ § вовсе, кромѣ заглавія, не встрѣчаемъ слова «длина», а вмѣсто того все время говорится о соизмѣримыхъ и несоизмѣримыхъ прямолинейныхъ отрѣзкахъ.

Повидимому, хотя авторъ этого и не поясняетъ, все время понятія «длина» и «прямолинейные отрѣзки» въ этомъ учебникѣ считаются тождественными.

Вопросъ о длинѣ долженъ разрабатываться по слѣдующему плану: сначала учимся строить прямолинейные отрѣзки (прямолинейный отрѣзокъ въ сущности есть комбинація прямой и двухъ точекъ) и оперировать надъ ними; затѣмъ устанавливаемъ возможность, опираясь на возможность распознавать равные отрѣзки, отличать больший отъ меньшаго, находить сумму двухъ отрѣзковъ, выражать каждый отрѣзокъ числомъ. Такимъ образомъ вовсе нѣтъ нужды говорить «о длинѣ прямол. отрѣзка»; въ примѣненіи къ другимъ объектамъ, какъ геометрическимъ, такъ и физическимъ, терминъ «длина» остается: мы говоримъ «длина ломаной линіи», «длина комнаты» и т. п. Тогда подъ именемъ длина какого либо объекта—надо понимать опредѣленный отрѣзокъ, связанный извѣстнымъ образомъ съ этимъ объектомъ: напр., подъ именемъ «длина ломаной» понимаютъ прямолинейный отрѣзокъ, который служитъ суммою всѣхъ сторонъ ломаной; подъ длиною комнаты понимаютъ, если полъ комнаты имѣетъ форму прямоугольника, наибольшую изъ сторонъ этого прямоугольника. Иногда прямолинейные отрѣзки, связанные съ извѣстными объектами, называютъ и другими именами: ширина, глубина, разстояніе и т. д. Возможно указать, что употребляютъ неправильное выраженіе «длина прямолинейнаго отрѣзка», здѣсь также надо съ объектомъ «прямолинейный отрѣзокъ» связать извѣстнымъ образомъ опредѣленный отрѣзокъ, и этимъ послѣднимъ является самъ данный объектъ.

Здѣсь, хотя бы—лишь мимоходомъ, слѣдуетъ указать на нѣкоторыя нарушенія стройности плана курса геометріи въ обычномъ его изложеніи. Вотъ два примѣра: 1) вопросъ о разстояніи между двумя точками переплетается съ развитіемъ мысли «противъ большаго угла лежитъ большая сторона и обратно», 2) развитіе идеи о перпендикулярности между прямой и плоскостью переплетается съ вопросами о параллельности прямыхъ въ пространствахъ.

V.

Работая надъ составленіемъ своего курса геометріи, я прежде всего, чтобы найти выходъ изъ указанной путаницы геометрической терминологіи, долженъ былъ остановиться на вопросѣ, нельзя ли части плоскости, части пространства въ самомъ дѣлѣ разсматривать «независимо отъ формы»?

Исходнымъ пунктомъ явилось соображеніе, что можно разсматривать прямолинейные отрѣзки независимо отъ ихъ положенія. Для этого слѣдуетъ лишь откладывать отрѣзки, равные даннымъ, на опредѣленной прямой, отъ ея опредѣленной точки, въ опредѣленномъ направленіи. Тогда можно называть длиною даннаго отрѣзка ту часть, которую займетъ этотъ отрѣзокъ при положеніи его на нашу опредѣленную прямую.

Подобное же положеніе является возможнымъ выполнить и для ограниченныхъ прямыми линиями частей плоскости. Здѣсь надо прежде всего дать полную теорію превращенія части плоскости въ другую ей равновеликую, независимо отъ измѣренія площадей. Конечно, цѣлью этой теоріи является установленіе положенія, что всякая, ограниченная прямыми линиями, часть плоскости можетъ быть превращена въ равновеликій прямоугольникъ, имѣющій данное основаніе. Тогда, выдѣливъ изъ плоскости неопредѣленную прямоугольную полосу (см. чертежъ), мы можемъ всякую часть плоскости, ограниченную прямыми линиями, превратить въ прямоугольникъ, основаніе котораго равно ширинѣ нашей полосы, и наложить этотъ прямоугольникъ на нашу полосу; тогда подъ именемъ «площадь ограниченной части плоскости» мы можемъ понимать то протяженіе нашей полосы, которое окажется занятымъ полученнымъ прямоугольникомъ.

Подобнымъ же образомъ необходимо, далѣе, дать теорію, позволяющую чисто геометрически превращать каждую ограниченную плоскостями часть пространства въ прямоугольный параллелепипедъ съ даннымъ основаніемъ, опредѣленнымъ разъ навсегда. Тогда понятіе объ объемѣ выяснилось бы аналогично понятію о площади.

При такомъ толкованіи явилась бы возможность сохранить традиціонную терминологию: фигура есть часть плоскости, а ея площадь есть та часть прямоугольной полосы, выбранной разъ навсегда, которую займетъ наша фигура на этой полосѣ послѣ соответствующаго превращенія; тѣло есть часть пространства, а объемъ тѣла есть соответствующая часть «пространственной прямоугольной полосы».

Авторы нашихъ учебниковъ не могутъ ссылаться на то, что такъ именно они и понимаютъ дѣло; не могутъ ссылаться потому, что въ ихъ учебникахъ нѣтъ чисто геометрической, независимой отъ измѣренія, теоріи превращенія частей плоскости и пространства въ прямоугольники и прямоугольные параллелепипеды съ даннымъ основаніемъ. А между тѣмъ, такая теорія для частей плоскости можетъ быть дана въ чисто геометрическомъ видѣ; для частей же пространства, ограниченныхъ плоскостями, дать такую теорію возможно лишь съ помощью принципа Кавальери, примѣняя его къ вопросу о превращеніи пирамиды въ равнобедренную призму. Но даже и проведеніе этой теоріи въ курсахъ геометріи не поколебало бы моей увѣренности въ томъ, что надо отказаться теперь отъ принятой терминологіи. Пусть Евклидъ, Архимедъ, Гюйгенсъ и проч. понимали подъ именемъ «треугольникъ» часть плоскости, но вѣдь они за то не употребляли выраженія «площадь треугольника»; они говорили: треугольникъ равенъ квадрату..., а мы теперь говоримъ: площадь треугольника равна площади квадрата...

Такое измѣненіе оборота нашей рѣчи вызвано тѣмъ взглядомъ на объекты геометріи, который теперь лишь постепенно завоевываетъ надлежащее мѣсто, среди математической литературы. Этотъ взглядъ сложился несомнѣнно подъ вліяніемъ создавшейся послѣ Евклида, Архимеда, Гюйгенса... отрасли геометрической науки, которая раньше называлась у насъ — Высшая геометрія (у немцевъ *Die Geometrie der Lage*), а теперь называется Проективная геометрія.

Вотъ тотъ взглядъ на объекты, съ которыми оперируетъ геометрія, который сложился у меня и который мнѣ представляется единственно правильнымъ. Въ изложеніи этого взгляда

я буду руководиться мыслями, высказанными Г. Пуанкаре въ его мемуарѣ «Наука и методъ».

VI.

Геометрія, какъ и всякая наука, имѣетъ дѣло съ фактами. Подъ вліяніемъ опыта наше сознаніе пришло къ возможности признать существованіе нематеріальныхъ точекъ, линій и поверхностей, причемъ выѣстилицемъ ихъ является пространство. Далѣе, изъ этихъ фактовъ выбираются простѣйшіе; таковыми мы признаемъ точку, прямую линію и плоскость. Затѣмъ начинается комбинаціонная работа, которая такъ хорошо изложена въ указанномъ сочиненіи Г. Пуанкаре: мы строимъ изъ этихъ фактовъ различныя комбинаціи, изыскиваемъ почему-либо интересныя среди нихъ. Каждая такая комбинація и является объектомъ для геометрическаго изслѣдованія. Такимъ образомъ на прямолинейный отрѣзокъ слѣдуетъ смотрѣть, какъ на комбинацію прямой линіи и двухъ точекъ на ней расположенныхъ, на уголъ—какъ на комбинацію точки и двухъ лучей изъ нея исходящихъ, на треугольникъ—какъ на комбинацію трехъ точекъ и трехъ попарно соединяющихъ ихъ прямыхъ и т. д.; въ связи съ этимъ названія кругъ и окружность должны считаться синонимами, какъ это часто на самомъ дѣлѣ и дѣлають, и должны обозначать геометрическое мѣсто точекъ плоскости, одинаково удаленныхъ отъ данной точки. Термины «площадь треуг-ка, площадь многоуг-ка, площадь круга» при вышеизложенномъ воззрѣніи получаютъ опредѣленный смыслъ и будутъ обозначать части плоскости, выдѣляемыя треуг-омъ, многоугольникомъ, кругомъ. Слѣдуетъ замѣтить относительно многоугольника, что можно построить такой, напр., 6-угольникъ (комбинація изъ 6 точекъ и 6 соединяющихъ ихъ въ опредѣленномъ порядкѣ прямыхъ), что смыслъ понятія «площадь этого 6-угольника» возможно установить лишь при условіи приписывать частямъ плоскости знаки + и —. Если же, какъ это обычно дѣлается въ элементарномъ курсѣ, отказаться отъ знаковъ для кусковъ плоскости, то слѣдуетъ говорить, что у этого 6-угольника

нѣтъ площади,—такіе многоугольники, неимѣющіе площади, обычно называются звѣздчатыми.

Аналогично этому долженъ развиваться взглядъ и на пространственные объекты: подъ именемъ призма, пирамида, многогранникъ и т. п. слѣдуетъ понимать всякій разъ вполне определенную комбинацію точекъ, прямыхъ и плоскостей. Тогда подъ именемъ «объемъ призмы», «объемъ пирамиды», «объемъ многогранника» слѣдуетъ понимать часть пространства, ограниченную соответствующей комбинаціею точекъ, прямыхъ и плоскостей. Болѣе общее понятіе «тѣло» слѣдуетъ толковать какъ комбинацію точекъ, какихъ-либо линий и какихъ-либо поверхностей, выделяющую изъ пространства определенную часть. Тогда подъ именемъ «объемъ тѣла» явится возможнымъ понимать часть пространства, выделяемую этимъ тѣломъ (т. е. этою комбинаціею). Также, наконецъ, подъ именемъ шаръ надо понимать geometr. мѣсто точекъ пространства, равноудаленныхъ отъ данной точки. Тогда терминъ «объемъ шара» получитъ смыслъ и будетъ выражать часть пространства, выделяемую разсматриваемымъ geometr. мѣстомъ. Возможно, наконецъ, сдѣлать еще шагъ впередъ и понимать подъ именемъ фигура любую комбинацію линий и точекъ на плоскости, а подъ именемъ тѣло любую комбинацію точекъ, линий и поверхностей въ пространствѣ (напр., тогда совокупность двухъ параллельныхъ плоскостей и перпендикулярной къ нимъ прямой является тѣломъ).

Возвращусь еще разъ къ нашимъ обычнымъ учебникамъ. Совершенно непонятною является разница между двумя опредѣленіями:

1) Многоугольникомъ назыв. фигура, образованная замкнутою ломаною линіею (иногда добавляютъ: вмѣстѣ съ частью плоскости, ограничеиною этою линіею).

2) Многогранникомъ называется тѣло (а подъ этимъ именемъ понимаютъ въ учебникахъ часть пространства), ограниченное со всѣхъ сторонъ плоскостями.

Первое опредѣленіе какъ бы указываетъ на желаніе смотрѣть на многоуг-къ, какъ на совокупность точекъ и прямыхъ линий (впрочемъ, здѣсь видна туманность воззрѣній ав-

торовъ учебниковъ; на это указываютъ: 1) совершенно не нужное слово «образованная» и 2) добавленія «вмѣстѣ съ частью плоскости, ограниченной этою линіею»,—вѣдь иногда невозможно и разобрать, какую часть плоскости эта линія ограничиваетъ). Почему же второе опредѣленіе (многогранника) не идетъ аналогично первому? Почему и на многогранникъ нельзя смотрѣть, какъ на замкнутую многогранную поверхность или какъ на комбинацію точекъ, прямыхъ и плоскостей?

При вышеизложенномъ возрѣніи на геометрическіе объекты становятся понятными требованія «построить уголь, треугольникъ, кругъ» и т. п. «построить призму, пирамиду» и т. п., становятся понятными и съ теоретической, и съ практической точки зрѣнія.

Съ теоретической точки зрѣнія построить какой либо объектъ на плоскости или въ пространствѣ значитъ—фиксировать свое вниманіе на опредѣленныхъ точкахъ и линіяхъ на плоскости, или на опредѣленныхъ точкахъ, линіяхъ и поверхностяхъ въ пространствѣ.

Съ практической точки зрѣнія мы прежде всего постулируемъ возможность построенія точекъ, прямыхъ и круговъ на плоскости и еще плоскостей въ пространствѣ, и это постулированіе даетъ намъ возможность осуществить объектъ, подлежащій построенію, если въ его составъ входятъ только перечисленные основные элементы.

При взглядѣ же напр., на многоугольникъ, какъ на часть плоскости, непонятнымъ является требованіе «построить многоугольникъ» ии съ теоретической, ии съ практической точки зрѣнія: 1) нельзя фиксировать свое вниманіе на части плоскости, не останавливая его на тѣхъ объектахъ, которыми эта часть выделяется, 2) мы постулируемъ возможность осуществленія точекъ, прямыхъ, плоскостей, а не частей плоскости и не частей пространства.

VII.

Въ заключеніе остановлюсь на вопросахъ общаго характера.

Въ настоящее время широкимъ распространеніемъ пользуется мысль о необходимости раздѣлить обученіе геометріи на

два курса: на пропедевтический и на систематический. Изъ основного положенія, что въ созиданіи геометріи участвуютъ двѣ нашихъ духовныхъ способности, интуиція и логика, дѣлають неправильный выводъ (см. докладъ С. А. Богомолова), что необходимо построить два курса геометріи, каждый изъ которыхъ опирался бы на одну изъ этихъ способностей. Вызываетъ прежде всего большія сомнѣнія вопросъ, возможно-ли отдѣлать вполне другъ отъ друга роль интуиціи и логику въ созиданіи геометріи? И тѣ научныя работы, которыя посвящены этому вопросу, еще не рѣшили этой задачи.

Нѣтъ, если интуиція и логика обѣ участвуютъ въ созиданіи геометріи, то отсюда слѣдуетъ, что должно стремиться къ созиданію такого учебнаго курса, въ которомъ бы эти наши способности были бы гармонически соединены для достиженія общей цѣли: сдѣлать близкими сознанію учащихся тѣ объекты, надъ которыми работаетъ геометрія. Въ этомъ курсѣ и интуиція, и логика должны идти рука объ руку. Не можетъ служить возраженіемъ противъ возможности такого курса указаніе на плохіе результаты изученія геометріи по существующимъ курсамъ; не можетъ служить потому, что, какъ я это старался показать въ своемъ докладѣ, въ современномъ курсѣ геометріи имѣютъ мѣсто постоянные конфликты между логикой и интуиціею и даже логика нашего курса оказывается весьма сомнительной. Кромѣ того, пусть сторонники раздѣленія курса геометріи на пропедевтический и систематическій дадутъ такіе курсы: нельзя же видѣть рѣшеніе этой задачи лишь въ томъ, что-бы, прежде чѣмъ изучать геометрію по нашимъ обычнымъ учебникамъ (неужели курсъ, излагаемый въ нихъ, можно назвать систематическимъ?), дать учащимся наборъ фактовъ, безъ углубленія въ изученіе ихъ, накопляя ихъ въ безпорядкѣ другъ за другомъ въ представленіи учащихся, какъ это дѣлается въ современныхъ пропедевтическихъ курсахъ (Кутозовъ, Астрябъ и другіе). Если мы правильно подошли бы къ рѣшенію задачи о раздѣленіи курса геометріи на пропедевтический и систематическій, то, можетъ быть, однимъ изъ главныхъ условий такого раздѣленія оказалась бы мысль, что въ систематическомъ курсѣ не должно повторяться то, что уже усвоено въ пропедеви-

ческомъ, и такимъ образомъ оба курса слились бы въ одинъ общеобразовательный курсъ, гдѣ въ началѣ первенствующее мѣсто занимала бы интуиція и лишь постепенно все большія и большія права захватывала бы логика.

Если будетъ признано необходимымъ познакомить учащихся съ работами въ области геометріи, задачею которыхъ является отдѣленіе интуиціи и логики, то этому знакомству нѣтъ мѣста въ общеобразовательномъ курсѣ. Оно возможно лишь въ специальныхъ математическихъ классахъ, которые имѣютъ мѣсто во Франціи и на необходимость которыхъ для русской школы въ этихъ же самыхъ стѣнахъ Педагогическаго Музея указалъ 20 лѣтъ тому назадъ В. Б. Струве, докладъ котораго по этому же поводу будетъ еще нами заслушанъ.

Другое добавленіе общаго характера и сдѣлаю по методикѣ геометріи.

Современное обученіе геометріи направляется двумя положеніями: 1) желаніемъ доказывать все, что не аксіома и 2) требованіемъ исходить въ этихъ доказательствахъ изъ опредѣленій. Во многихъ оффиціальныхъ программахъ, даже новѣйшаго времени, указывается на «развитіе формальнаго мышленія» учащихся и на «построеніе системы опредѣленій».

Главную цѣль моего доклада было намѣреніе показать, до чего доходить на практикѣ слѣдованіе этимъ двумя положеніями: мы доказываемъ теоремы, не имѣющія содержанія, а, съ другой стороны, мы даемъ опредѣленія, противорѣчащія другъ другу.

На наше счастье имѣются ученики, способные къ математикѣ, которые сами начинаютъ смутно сознавать, что не въ томъ суть, что опредѣленія выставляются въ курсѣ геометріи лишь для порядка, а на самомъ дѣлѣ не ихъ надо стремиться усвоить.

Да, конечно, суть дѣла не въ опредѣленіяхъ. Если мы возьмемъ какой-либо геометрической объектъ, даже не изъ основныхъ (опредѣленія основныхъ геометрическихъ объектовъ были разобраны въ докладѣ), напр., ромбъ, то даже здѣсь можно было бы поднять споръ объ его опредѣленіи: одни говорили бы, что ромбъ есть параллелограмъ, у котораго двѣ сосѣднія сто-

роны равны, а другіе утверждали бы, что ромбъ есть параллелограмъ, у котораго всѣ стороны равны, а между тѣмъ образъ ромба у всѣхъ насъ одинъ и тотъ же. Создать систему опредѣленій основныхъ геометрическихъ понятій—дѣло крайне трудное, и предыдущія страницы моего доклада касаются этого вопроса.

Поэтому въ основу обученія геометріи должно быть положено созданіе правильныхъ образовъ геометрическихъ объектовъ, а не «система опредѣленій». Опредѣленія всегда остаются лишь словами, и эти слова, если они заучены, не являются еще гарантіею того, что учащіеся представляютъ себѣ объекты, соответствующіе этимъ словамъ. Если же мы добьемся того, чтобы учащіеся свыклись съ образами геометрическихъ объектовъ, то описаніе ихъ словами является задачею, легко разрѣшаемою.

Итакъ, исходнымъ пунктомъ является созданіе образовъ. Все обученіе геометріи должно, по моему мнѣнію, въ каждой части курса распадаться на 4 стадіи: 1) прежде всего необходимо научиться осуществлять объектъ; въ области элементарной геометріи осуществленіе объекта сводится къ построенію циркулемъ и линейкою, но не слѣдуетъ пренебрегать осуществленіемъ и при помощи модели; 2) послѣ того, какъ объектъ осуществленъ, слѣдуетъ всестороннее изученіе какъ самого объекта, такъ и тѣхъ вопросовъ, которые возникаютъ при его осуществленіи,—это изученіе направляется сопоставленіемъ этого объекта съ тѣми, которые уже были изучены, 3) далѣе, должны слѣдовать упражненія въ построеніяхъ, причемъ подъ этимъ именемъ я понимаю не общепринятые задачи на построеніе, а тѣ малые упражненія, которыя необходимы, чтобы образъ объекта лучше запечатлѣлся въ сознаніи учащихся, напр.: для усвоенія образа перпендикулярныхъ прямыхъ необходимо строить (а иногда даже только рисовать отъ руки) перпендикуляры къ даннымъ прямымъ, располагая ихъ во всевозможныхъ положеніяхъ по отношенію къ краямъ доски или страницы тетради; для ознакомленія съ разнообразіемъ образовъ параллелограммовъ надо строить рядъ параллелограммовъ по даннымъ, не вполне опредѣляющимъ параллелограмъ (напр., по двумъ противоположнымъ вершинамъ и т. п.),—здѣсь важнымъ моментомъ обученія является сознаніе учащагося, что онъ можетъ

удовлетворить требованіямъ задачи и въ то же время слѣдовать своему произволу; 4) наконецъ, можно обратить преимущественное вниманіе на логику и предложить рядъ логическихъ упражненій, сводящихся къ составленію различныхъ возможныхъ словесныхъ опредѣленій изучаемаго объекта и къ выводу изъ составленнаго какого-либо опредѣленія, въ которомъ перечислены рядъ признаковъ объекта, другихъ признаковъ того же объекта.

Необходимо обратить вниманіе на то, что предлагаемая методика обученія геометріи требуетъ много времени, быть можетъ, значительно больше, чѣмъ его дается теперь на уроки геометріи. И поэтому мнѣ представляется крайне желательнымъ увеличить время, отведенное на геометрію, безъ увеличенія (а можетъ быть, даже и съ сокращеніемъ) программы; особенно это необходимо для женскихъ гимназій, какъ Мин. Нар. Просв., такъ и особенно Вѣдом. Имп. Маріи.

Кромѣ того, если мы хотимъ правильно обучать геометріи и добиться осязательныхъ результатовъ, необходимо отказаться отъ установившейся внѣшней схемы преподаванія. Эта внѣшняя схема у насъ состоитъ изъ четырехъ моментовъ: объясняется, задается, спрашивается, оцѣнивается.

Пора отказаться отъ этой схемы; не должно быть ни заданийъ, ни спрашиваній; все время должна идти одна непрерывная работа учащихся подъ руководствомъ преподавателя надъ усвоеніемъ разбираемыхъ вопросовъ, надъ углубленіемъ въ ихъ сущность. Эта работа, начинаясь въ классѣ, можетъ быть продолжаема въ извѣстные моменты учащимися и внѣ класса. Уже изъ того положенія, что основною обученія является не выучиваніе опредѣленій, а сознаніе образовъ, слѣдуетъ, что безцѣльно задавать разучивать страницы учебниковъ и спрашивать выученное дома. Если внимательно вникнуть въ содержаніе той работы, которая выше мною разбита на 4 стадіи (осуществленіе образа, его изученіе, упражненія въ построеніяхъ, логическія упражненія), то легко видѣть, что въ этой работѣ нѣтъ мѣста ни задаванію, ни спрашиванію, а тѣмъ болѣе нѣтъ мѣста для оцѣнки баллами этихъ отдѣльныхъ спросовъ.

Тѣ точки зрѣнія, которыя я развивалъ въ своемъ докладѣ, я проводилъ не только въ составленныхъ мною курсахъ геометріи, но и на практикѣ: въ двухъ женскихъ гимназіяхъ и на общеобразовательныхъ курсахъ Московскаго Общества Народныхъ Университетовъ. Правда, недостатокъ времени не позволялъ провести курсъ вполне такъ, какъ хотѣлось бы, а, съ другой стороны, установившаяся схема преподаванія заставляла прибѣгать къ искусству жонглированія; но я видѣлъ, что мои ученицы и мои слушатели относились къ занятіямъ геометріею съ интересомъ. А видѣть этотъ интересъ на своихъ урокахъ для насъ, преподавателей, и должно являться наиболѣе цѣнною, наиболѣе желательною наградою».

К о н с п е к т ъ.

Сложившійся у насъ курсъ геометріи въ средней школѣ обладаетъ недостатками, которые иѣшаютъ пониманію курса учащимися.

Логика въ курсѣ геометріи должна проявляться двояко: 1) въ планѣ построенія курса и 2) въ силлогизмахъ, служащихъ для доказательства теоремъ.

Наибольшее значеніе должно имѣть первое проявленіе логики, между тѣмъ, какъ нашъ курсъ обращаетъ больше вниманія на второе.

Современный курсъ геометріи грѣшитъ противъ обоихъ проявленій логики:

1) Примерами прегрѣшеній противъ второго проявленія служатъ прямая и обратная теорема о смежныхъ углахъ, одна изъ аксіомъ о прямой линіи, одна изъ обратныхъ теоремъ о перпендикулярахъ и наклонныхъ и проч.

2) Прегрѣшенности противъ перваго проявленія логики проявляются въ опредѣленіяхъ основныхъ понятій (тѣло, объемъ, многоугольникъ, площадь, длина и т. п.), а также въ недостаточномъ отдѣленіи развитія одной идеи отъ развитія другой.

Выходъ изъ указанныхъ затрудненій возможенъ лишь съ

установленіемъ новой терминологіи, заимствованной изъ про-
ективной геометріи.

Обученіе геометріи должно покояться не на изученіи
системы опредѣленій, а на созданіи образовъ въ представленіи
учащихся.

Желательность измѣненія вѣшной схемы преподаванія.

Необходимость увеличенія времени для курса геометріи,
особенно въ женскихъ гимназіяхъ.

Пренія по докладу Н. А. Извольскаго.

А. П. Киселевъ (Спб.) относительно методическихъ указаній
докладчика сдѣлалъ слѣдующія замѣчанія:

I. Теорема о суммѣ смежныхъ угловъ имѣетъ смыслъ даже
и тогда, когда она основывается на понятіи о развернутомъ углѣ,
и смыслъ ея совершенно ясенъ, если не введено въ самомъ на-
чалѣ геометріи понятія о развернутомъ углѣ.

II. Если имѣетъ смыслъ прямая теорема, то и обратная ей
имѣетъ смыслъ.

III. Утвержденіе докладчика, что выраженіе „перпендикуляръ
короче всякой наклонной“ и выраженіе „кратчайшее разстояніе
отъ точки до прямой есть перпендикуляръ, опущенный изъ этой
точки на прямую“ — равносильны, является утвержденіемъ не-
правильнымъ: предположенія эти — различны. Это становится со-
вершенно яснымъ, если вообразить, что не изъ всякой точки
можно опустить перпендикуляръ на прямую.

IV. Вопросъ объ опредѣленіяхъ для площади и объема при-
надлежитъ къ труднѣйшимъ. Не достаточно удовлетворительно
опредѣлены эти понятія и въ научныхъ сочиненіяхъ, а потому со-
отвѣтственная неточность въ элементарномъ курсѣ геометріи не
является особенно важной.

Е. С. Томашевскій (Москва). «Докладчикъ, коснувшись боль-
ныхъ мѣстъ нашихъ учебниковъ геометріи, совсѣмъ не упомянулъ
о томъ недостаткѣ, который имѣется въ изложеніи вопросовъ,
касающихся пропорціональности различныхъ величинъ и измѣ-
ренія площадей и объемовъ. Во всѣхъ этихъ статьяхъ постоянно
разсматриваются случаи соизмѣримости и несоизмѣримости и раз-
сматриваются очень плохо: логика и строгость здѣсь отсутствуютъ.
Напримѣръ, при сравненіи площадей двухъ прямоугольниковъ
перемножаются отношенія отрезковъ по способу перемноженія

дробей, безъ всякаго права на такое дѣйствіе. Не проще ли при измѣреніи площади прямоугольника получить приближенный результатъ съ указаніемъ, какъ ошибки, такъ и средства къ ея уменьшенію. Еще слабымъ мѣстомъ учебниковъ является статья о длинѣ окружности и площади круга“.

П. А. Компанейцъ (Одесса) замѣтилъ, что совершенно напрасно авторы учебниковъ избѣгаютъ давать понятіе о „развернутомъ углѣ“: по наблюденіямъ П. А. Компанейца, это понятіе легко усваивается учениками.

А. Л. Остроумова (Тихвинъ, Новг. г.) высказала пожеланіе, чтобы въ главѣ объ измѣреніи угловъ были рѣзко подчеркнуты три возможныхъ типа угловъ, стороны которыхъ пересѣкаютъ окружность: 1) вершина угла лежитъ на окружности; 2) вершина лежитъ внѣ круга и 3) вершина лежитъ внутри круга.

О. П. Перли (Ростовъ на Дону) выразилъ сожалѣніе о томъ, что докладчикъ не коснулся болѣе подробно вопроса о задачахъ на построеніе. Затѣмъ О. П. Перли отмѣтилъ слѣдующіе недостатки въ школьныхъ курсахъ геометріи.

I. Уголъ трактуется въ учебникахъ, какъ часть плоскости.

II. Въ учебникахъ имѣются три теоремы о равенствѣ треугольниковъ и нѣсколько теоремъ о равенствѣ прямоугольныхъ треугольниковъ; основныхъ же задачъ на построеніе треугольниковъ—четыре и основныхъ случаевъ рѣшенія косоугольныхъ треугольниковъ въ тригонометріи—четыре: слѣдовательно, теоремъ о равенствѣ треугольниковъ должно быть четыре.

III. О подобіи треугольниковъ говорится раньше, чѣмъ о пропорціональныхъ отрѣзкахъ: теорема „Въ подобныхъ треугольникахъ сходственные стороны пропорціональны“ предшествуетъ теоремѣ: „Двѣ параллельныя прямыя разсѣкаютъ стороны угла на пропорціональныя части“. Слѣдовало бы держаться обратнаго порядка.

П. А. Долгушинъ (Кіевъ) отмѣтилъ большое число нападокъ на неясность въ опредѣленіяхъ основныхъ понятій (напр., „угла“) и, во избѣжаніе споровъ на эту тему въ будущемъ, предложилъ просить Организационный Комитетъ слѣдующаго Съѣзда о томъ, чтобы компетентными лицами было подготовлено нѣсколько докладовъ объ основныхъ математическихъ понятіяхъ.

По поводу пожеланія, высказаннаго П. А. Долгушинымъ, присутствовавшій предсѣдатель Организационнаго Комитета З. А. Макшеевъ обратился къ Собранію со слѣдующимъ заявленіемъ: „Организационный Комитетъ сочтетъ своей обязанностью содѣйствовать осуществленію только тѣхъ пожеланій, которыя будутъ

переданы ему Собраніемъ, — съ своей стороны, я могу только пожелать, чтобы такого рода заявленія отъ васъ туда поступали!“

II. А. Извольскій (Москва). „Выпрямленный уголъ есть единственный изъ угловъ, отличающійся отъ всѣхъ остальныхъ особымъ признакомъ; поэтому введеніе его въ курсъ необходимо. Безъ этого угла нѣтъ смысла говорить о суммѣ двухъ смежныхъ угловъ: безъ него былъ бы нарушенъ постулатъ о сложении, потому что сложение оказалось бы не всегда возможнымъ“.

„Доводы А. П. Киселева не убѣдили меня, и я опять-таки утверждаю, что предложенія „перпендикуляръ короче всякой наклонной“ и „кратчайшее разстояніе точки отъ прямой есть перпендикуляръ“ — являются различными словесными выраженіями одной и той же мысли“.

„Я очень благодаренъ Е. С. Томашевичу, который привелъ еще другіе примѣры изъ курса геометріи, указывающіе на неправильное трактованіе предмета. Задачи и упражненія на построеніе должны быть основою всего курса геометріи“.

„Прямой уголъ по моему плану долженъ быть введенъ въ курсъ только тогда, когда онъ самъ-собою получается, т. е., послѣ построенія ромба“.

„Знакомство съ основами проективной геометріи является необходимымъ для преподавателя, подъ ея вліяніемъ измѣнился взглядъ на геометрическіе объекты. Если Эвклидъ, Архимедъ, Гюйгенсъ и др. подъ именемъ «треугольникъ» понимали «часть плоскости», то они никогда не говорили «площадь треугольника». Послѣ нихъ развилась проективная геометрія, которая на всякій многоугольникъ смотритъ, какъ на комбинацію точекъ и прямыхъ. Такой взглядъ необходимо перенести и въ элементарный курсъ; причемъ подъ площадью многоугольника надо понимать ту часть плоскости, которая имъ ограничивается, если многоугольникъ не звѣздчатый; если же многоугольникъ звѣздчатый, то для установленія понятія о его площади необходимо приписывать частямъ плоскости знаки „+“ и „—“. Несомнѣнно, въ моемъ курсѣ геометріи имѣется много недостатковъ (нѣкоторые изъ нихъ я уже самъ замѣтилъ); но надо смотрѣть на мои книги, какъ на одну изъ первыхъ попытокъ построить курсъ геометріи на новыхъ основаніяхъ“.

VII О реальномъ направленіи преподаванія математики въ связи съ жизненными и научными фактами.

Докладъ Н. Н. Володженіча (Кіевъ).

«Требованіе жизненности и реальности изучаемаго матеріала не означаетъ признанія утилитарной цѣли, какъ наивысшей цѣли образованія. Утилитарная точка зрѣнія оцѣниваетъ знаніе по его непосредственной практической приложимости; но непосредственно утилизируемое знаніе есть прикладная наука, и ея изученіе входитъ въ задачу спеціальной или профессиональной, а не общеобразовательной школы. Цѣль науки болѣе высокая, чѣмъ непосредственная польза; она стремится къ открыто истинѣ и удовлетворенію наиболѣе высокихъ запросовъ души человека. Какъ говоритъ Laisant, измѣрять науку по ея полезности — это почти преступленіе. Оцѣнивать науку по ея практической полезности, въ качествѣ руководящей точки зрѣнія въ общеобразовательной школѣ, такъ же абсурдно, какъ совершенно устранить всякое практическое приложение науки въ спеціальной школѣ. Но требованіе основывать преподаваніе науки въ общеобразовательной школѣ на жизненныхъ и реальныхъ фактахъ не только не исключаетъ основную идею общеобразовательной школы — всестороннее развитіе душевныхъ силъ воспитанника — но даже единственно имѣетъ се въ виду, утверждая только, что достиженіе этой цѣли наиболѣе надежно гарантируется жизненнымъ и реальнымъ содержаніемъ. Какія же основанія могутъ быть приведены для этого утвержденія?

Наука занимается общимъ, а не спеціальнымъ, абстрактнымъ, а не конкретнымъ. Абстракція составляетъ ея сущность. Путемъ абстракціи она строитъ свои обобщенія, свои законы, гипотезы и теоріи — весь тотъ удивительный міръ символовъ, въ которомъ умъ человека, повидимому, ничѣмъ не стѣсненный, кромѣ собственныхъ законовъ, свободно и легко вращается. Вся наука представляетъ идеальное построеніе; законы, классификація, обобщенія существуютъ только въ умѣ человека, въ природѣ же нѣтъ общихъ, а только конкретные, единичные

факты. Иногда очень близко соприкасаясь съ конкретнымъ, какъ въ естественныхъ наукахъ, наука иногда почти бесконечно отъ него удаляется, и въ математикѣ стоитъ такъ далеко отъ конкретного міра, что, повидимому, ничего не имѣетъ съ нимъ общаго. Кантъ сказалъ, что наука лишь постольку заслуживаетъ названія науки, поскольку она проникается математикой; это стремленіе всякой науки принять математическую обработку обуславливается самой ея сущностью,—тѣмъ, что ея область—общее и абстрактное, а не единичное и конкретное, вѣчное, а не временное; поэтому наука дѣлается тѣмъ болѣе научной, чѣмъ болѣе она удаляется отъ конкретного и временнаго, чѣмъ болѣе принимаетъ математическую обработку.

Необходимость абстракціи и выработки общихъ идей вытекаетъ изъ безграничной сложности явленій конкретной дѣйствительности и ограниченной силы нашего ума. Всякій простѣйшій конкретный фактъ, воспринимаемый нами какъ нѣкоторое единство, по существу представляетъ сложную совокупность причинъ, условій и свойствъ; чтобы мыслить конкретный фактъ, какъ единое цѣлое и въ то же время бесконечно-сложное цѣлое, необходимы мыслительныя силы, превышающія ограниченныя силы нашего ума. Отсюда необходимость упростить явленіе, выдѣлать то, что составляетъ его сущность, т. е. совершить тѣ умственные операціи, которыя называются абстрагированьемъ и обобщеніемъ, и подставить вмѣсто конкретного факта отвлеченную идею, т. е. символъ, обнимающій всѣ однородные факты въ одномъ усилии мысли.

По этотъ міръ символовъ, составляющій науку и создаваемый абстрагирующей и обобщающей дѣятельностью ума человѣка, не есть его самостоятельное твореніе; умъ самъ по себѣ, своей собственной и ничѣмъ не стѣсненной дѣятельностью, не можетъ создать ни одной общей идеи, основной матеріалъ для которой не былъ бы взятъ изъ конкретного міра. Поэтому вся наука въ цѣломъ представляетъ только идеальное отображеніе въ умѣ человѣка всеобщей связи вещей и явленій конкретного міра и обуславливается неснособностью нашего ума понимать конкретное иначе, какъ *sub specie abstracti*. Такимъ образомъ наука, какъ и наша мысль, остается

навыки и неразрывно связанной съ конкретнымъ. Какъ бы далеко не уносился нашъ умъ въ своей абстрагирующей и обобщающей дѣятельности отъ реальнаго міра, единственнымъ критеріемъ правильности его дедукцій остается согласіе ихъ съ реальными фактами. Въ этомъ мірѣ символовъ, отвлеченныхъ построений, теорій и дедукцій изъ нихъ, который составляетъ науку, легко заблудиться и придти къ нелѣпымъ выводамъ, если упускать изъ виду, что идеальное лишь постольку истинно, поскольку оно соотвѣтствуетъ дѣйствительности; необходима поэтому постоянная провѣрка результатовъ, добытыхъ умственными операціями, на ихъ согласіе съ дѣйствительностью. Реальное, конкретное — это тотъ оселокъ, на которомъ испытывается достоинство всякой теоріи, всякаго идеальнаго построенія въ какой бы то ни было области знанія — въ наукахъ о природѣ, гуманитарныхъ или математическихъ. Въ этомъ взаимодѣйствіи идеальнаго и реальнаго осуществляется возможная для насъ полнота нашего знанія; одни конкретные факты не могутъ составить научнаго знанія — совокупность ихъ есть не что иное, какъ грубый эмпиризмъ, но и одно отвлеченное знаніе не имѣетъ цѣны, потому что въ своихъ выводахъ оно шатко и недостоверно. Рождаясь изъ конкретныхъ фактовъ, наши умозрѣнія и теоріи должны обратно вернуться къ конкретному міру и изъ согласія съ нимъ получить свое оправданіе и почерпнуть дальѣйшую поддержку. Такимъ образомъ, проникновеніе науки конкретнымъ содержаніемъ обуславливается самой природою науки, зависящей отъ природы нашей мыслительности и нашей познавательной дѣятельности. Но связь науки съ конкретнымъ міромъ необходима еще для достоинства самой науки, — для того, чтобы она не превратилась въ пустую и безполезную игрушку.

Этотъ конкретный міръ, къ которому должна вернуться наука, чтобы не потерять послѣ ряда дедукцій своей точки опоры, есть міръ единичныхъ фактовъ, тотъ міръ, въ которомъ мы живемъ и дѣйствуемъ. Опираясь въ наукѣ съ общими, отвлеченными идеями, мы въ жизни, въ реальномъ мірѣ имѣемъ дѣло только съ единичными, конкретными фактами. Переходъ отъ абстрактнаго къ конкретному означаетъ, слѣдова-

тельно, переходъ отъ научныхъ выводовъ и общихъ положеній къ жизненному и реальному, переходъ отъ того, что мыслится, къ тому, что дѣлается. Конечно, наука или знаніе не является *primum movens* нашихъ поступковъ, но, освѣщая факты и ихъ взаимоотношенія, она призвана руководить нашимъ поведеніемъ.

Поэтому, элементъ полезности никоимъ образомъ не можетъ быть устраненъ изъ науки. Не заботясь о непосредственной приложимости своихъ выводовъ, наука не можетъ совершенно забыть о пользѣ, приносимой ею посредственно. Въ глубинѣ сознанія всякаго безкорыстнаго дѣятеля науки живетъ мыслъ о томъ, что его работа содѣйствуетъ благу и счастью людей, и что въ этомъ смыслѣ она полезна. Отымите у него это сознаніе; пусть онъ придетъ къ убѣжденію, что его работа абсолютно бесполезна для блага общества; найдется ли человѣкъ, кромѣ душевно-больнаго, который станетъ бы продолжать такую работу? Какъ бы далеко ни отстояло практическое приложение къ жизненнымъ задачамъ отъ выводовъ науки, какие промежутки времени или рядъ промежуточныхъ звеньевъ ни раздѣляли ихъ, въ конечномъ счетѣ только въ отношеніи къ жизненнымъ фактамъ наука находитъ свое оправданіе, свое право на существованіе. Съ идеальной стороны задача науки—выясненіе истины; но эта истина существуетъ только въ мірѣ фактовъ, или какъ согласіе теоретическихъ построеній съ конкретною дѣйствительностью, или какъ осуществленіе того, что мы считаемъ за истину въ нашемъ поведеніи: наука, которая стоитъ выше или вѣдѣ фактовъ, которая не имѣетъ никакого отношенія къ нимъ и не оказываетъ вліянія на наше поведеніе въ человѣческомъ обществѣ, такая наука, въ случаѣ, если бы она была возможна, практически для насъ не существовала бы. Она могла бы служить предметомъ размысленія, какъ, напримеръ, теорія шахматной игры или филателия, но никогда не служила бы факторомъ прогресса.

Въ служеніи на пользу человѣчества, еще Законъ Веруламекій цѣлалъ достоинство науки. Наука для науки такое же уродливое явленіе, какъ и искусство для искусства. Наука, какъ искусство, какъ и все, созданное человѣкомъ, служить для человѣка, для его нуждъ и потребностей, для улучшенія

его жизни и расширенія его счастья, для приближенія его къ идеальному состоянію. Поэтому нѣтъ самодовлѣющей науки. Великая наука сама по себѣ имѣетъ только служебное значеніе, какъ способъ познанія одной изъ сторонъ единой Великой Истины, къ полному познанію которой стремится вся ихъ совокупность, какъ одинъ изъ способовъ осуществить идеальное состояніе на землѣ. Такимъ образомъ, только въ связи съ другими науками и въ служеніи ихъ всѣхъ вмѣстѣ на пользу человѣка наука обрѣтаетъ свое достоинство и значеніе. Запинаясь въ ограниченную область своихъ собственныхъ понятій и предстанленій, становясь внѣ этой взаимной связи и внѣ отношеній къ міру конкретныхъ фактовъ и обширной области человѣческихъ дѣйствій, какъ отдѣльная наука, такъ и все наше знаніе превращается въ безплодную игру ума; вмѣсто реальныхъ вещей и отношеній между вещами предметомъ изученія дѣлаются ихъ словесные символы и отношенія между словами, т. е. возникаетъ пербатуръ и формализмъ, все то, чѣмъ характеризуется схоластика.

Требованіе, чтобы наука считалась съ реальными фактами и служила на пользу челоѣчества, не слѣдуетъ понимать въ томъ смыслѣ, чтобы дѣятель науки въ своихъ изслѣдованіяхъ непремѣнно руководился этой цѣлью. Наука не представляетъ результата планоѣрной дѣятельности челоѣческаго ума; она развивается черезъ посредство людей, но помимо ихъ воли и намѣреній. Каждый отдѣльный изслѣдователь не знаетъ, къ чему приведутъ его изысканія въ избранной имъ области науки; еще менѣе онъ знаетъ то, какъ отразится его открытія въ умѣхъ его современниковъ и будущихъ поколѣній, какія возбудятъ въ нихъ мысли и къ какимъ приведутъ результатамъ. Ученый, правда, ставитъ себѣ цѣль изслѣдованія; но достигнетъ ли онъ ея, или, напротивъ, не приведутъ ли его изысканія къ чему-либо совершенно для него неожиданному, — для него неизвѣстно. Ассоціированье и возникновеніе мыслей въ душѣ челоѣка совершается произвольно, въ зависимости отъ влѣившихъ условій и отъ комплекса идей, образовъ, представленій и чувствованій, нѣвющихся въ душѣ, или, по выраженію Гербарта, отъ ассоціиціонной массы души. Поэтому

не правъ Законъ, считая задачей научной дѣятельности умноженіе полезныхъ изобрѣтеній: всякое изобрѣтеніе такъ же произвольно, какъ и любая мысль, возникающая въ душѣ человѣка. Но такъ какъ научная мысль развѣртывается, хотя и не произвольно, но въ зависимости отъ психическаго содержанія, то является въ высшей степени важнымъ, что бы въ числѣ другихъ, въ душѣ содержалась и правильная идея о характерѣ научной дѣятельности и о значеніи науки въ обществѣ культурнаго движенія человѣчества.

Примѣнимъ всѣ эти мысли къ педагогическому дѣлу. Если школьное преподаваніе не составляетъ самой цѣли, если въ школѣ желательнѣе учить не для школы, а для жизни, если въ ся задачу входитъ не только снабженіе воспитанника знаніями, но и выработка изъ него личности, обладающей извѣстнымъ міровоззрѣніемъ, живущей въ обществѣ и способной творить и дѣйствовать, т. е. пользоваться, своими знаніями, то школьное преподаваніе должно быть поставлено такъ, что бы въ немъ проводилась такая же тѣсная связь между абстрактнымъ и конкретнымъ, которая характеризуетъ научную дѣятельность. Необходимо, чтобы наши воспитанники поняли, что конкретные факты—единственная истина, доступная нашимъ органамъ; что они представляютъ основу нашихъ абстракцій и теорій и *instantiam crucis* для ихъ провѣрки; что всякая теорія содержитъ только частичную истину, и ни одна не можетъ представить ее во всей полнотѣ; что поэтому всякая теорія есть только ступень къ достиженію истины и имѣетъ только временное значеніе. Въ то же время они должны помнить, что одни факты еще не даютъ научнаго значенія, потому что оно состоитъ не въ одномъ знаніи фактовъ, но и въ установленіи между ними той или иной связи, которая дается теоріей; что поэтому ни теорія безъ фактовъ, ни факты безъ теоріи не имѣютъ значенія. Мы должны приучить нашихъ воспитанниковъ къ постоянной провѣркѣ теоретическихъ построеній на ихъ согласіе съ дѣйствительностью; внушить имъ необходимость добросовѣстнаго признанія факта и уваженія къ нему, какъ къ высшей силѣ, отрицать которую никто не въ

сплахъ ¹⁾. Съ другой стороны, мы должны выработать въ нихъ уваженіе къ теоріи, которая одна даетъ смыслъ фактическому содержанію: но въ то же время должны предохранить ихъ отъ переоцѣнки теорій, отъ привычки къ категорическимъ сужденіямъ безъ достаточнаго и всесторонняго изслѣдованія фактовъ, по отношенію къ которымъ онѣ высказываются. Правильное пониманіе соотношенія между теоріями и фактами и правильная оцѣнка значенія тѣхъ и другихъ составляетъ основу научнаго скептицизма, весьма важнаго не только въ наукѣ, но и въ жизни. Мы должны вооружить имъ нашихъ воспитанниковъ съ тѣмъ, чтобы они не принимали безъ критической оцѣнки ни факта, ни теоріи, но привыкли проверять факты на ихъ согласіе съ теоріей, какъ теоріи — на ихъ согласіе съ фактами, чтобы они приучились преклоняться передъ фактомъ, признавши послѣ добросовѣстнаго изслѣдованія его неоспоримость, и могли мужественно отказываться отъ теоріи въ случаѣ ея несогласія съ достовѣрнымъ фактомъ; наконецъ, мы должны вызвать въ нашихъ воспитанникахъ сознаніе того, что наука не пустая игрушка, но что она служитъ великимъ цѣлямъ — розысканію истины и созданію лучшихъ культурныхъ условій для жизни людей.

Каждая личность достигаетъ полнаго, возможнаго для нея духовнаго развитія только благодаря социальной средѣ; работая въ человѣческомъ обществѣ, содѣйствуя благу и счастью другихъ людей, расширяя ихъ силы, личность строитъ и собственное счастье и расширяетъ собственные силы. Ея назначеніе — активная жизнь, дѣятельность въ какой бы то ни было области — практической или умственной. Только въ такой дѣятельности она достигаетъ полноты, духовнаго и въ частности умственнаго развитія, а не въ изученіи книжныхъ формулъ и не въ умственной гимнастикѣ. Во всѣхъ случаяхъ плодотворность дѣятельности стоитъ въ прямомъ соотношеніи съ широтою взглядовъ, ее направляющихъ. Широта же взгляда есть такая точка зрѣнія на вещи,

¹⁾ Признание факта есть утвержденіе: «что есть, то есть», и не означаетъ неирраціональнаго примиренія съ нимъ.

которая принимаетъ во вниманіе не одну или немногія, но возможно большее число ихъ сторонъ, т. е. стремится разсматривать вещи не изолированно или въ немногихъ ихъ связяхъ съ другими вещами, но во всей совокупности ихъ отношеній ко всемъ другимъ вещамъ и фактамъ: но эта способность видѣть и принимать во вниманіе всю многосторонность отношеній каждаго факта и есть ничто иное, какъ умственное развитіе. Такимъ образомъ, умственное развитіе оказывается неотдѣлимымъ отъ знакомства съ вещами и отношеніями конкретнаго міра. Подготавливая воспитанника къ плодотворной практической дѣятельности, мы вводимъ его въ пониманіе конкретныхъ фактовъ и обозначиваемъ вѣзѣтъ съ этимъ и его умственное развитіе; точно также и въ области умственной дѣятельности умственное развитіе основывается на конкретномъ содержаніи, потому что истинная наука никогда не упускаетъ изъ вида своего отношенія къ конкретной дѣятельности.

Такимъ образомъ, чтобы достигнуть педагогическихъ и общественныхъ цѣлей, имѣющихъ въ виду выработку людей, способныхъ дѣйствовать и быть живыми и полезными членами общества, обладающими нужнымъ для этого душевнымъ развитіемъ, необходимо, чтобы преподаваніе въ цѣломъ, общее его направленіе отводило видное мѣсто конкретному содержанію, а не изгоняло его такъ тщательно, какъ это часто наблюдается теперь. Если ошибоченъ взглядъ, по которому требованіе жизненности и реальности учебнаго матеріала означаетъ признаніе за высшую задачу образованія утилитарную цѣль, то также глубоко ошибоченъ и другой взглядъ, смѣшивающій заботу о конкретномъ содержаніи съ матеріалистическимъ направленіемъ преподаванія; проводникомъ этого мнѣнія былъ графъ Д. А. Толстой, но оно не имѣло отвергнуто и въ настоящее время. «Вопросъ между древними языками, какъ основой всего дѣйствительнаго научнаго образованія, и всякимъ другимъ способомъ обученія есть вопросъ не только между серьезнымъ и поверхностнымъ ученіемъ, но и вопросъ между нравственнымъ и матеріалистическимъ направленіемъ обученія и воспитанія, а слѣдовательно и всего общества»,

писатель графъ Д. Толстой въ 1871 году. Изъ-за той же материалистической опасености вліятельные члены Государственнаго Совета высказывались въ 1872 году противъ уращенія въ правахъ реальныхъ училищъ съ гимназіями: изъ-за этого же опасенія учебный планъ гимназій 1872 года, вводя изученіе древнихъ языковъ, на первое мѣсто выдвигалъ ихъ грамматику, а не содержаніе твореній великихъ писателей древности. Но если здѣсь изгонялось реальное содержаніе, то въ другихъ случаяхъ, гдѣ по существу нельзя было его избѣгнуть, стремились обезсречить его изгнаніемъ всякой теоріи, всякаго обобщенія. Эта тенденція ясно выражена, напримѣръ, въ опубликованной Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія въ 1893 г. программѣ для составленія учебника естественной исторіи на соисканіе премии Императора Петра Великаго. Первымъ и главнѣйшимъ дѣломъ въ естественной исторіи, говорится здѣсь, должно быть изученіе естественной системы; анатомическія свѣдѣнія нужно сообщать лишь въ той мѣрѣ, въ какой они надобны для системы. Конечно, система важна и необходима; но если она ставится какъ конечная цѣль изученія, то результатомъ является формализмъ, который ведетъ не къ развитію учащагося, а къ его отупѣнію. Изгнаніе изъ преподаванія конкретнаго содержанія или его обезвреживаніе выдвиганіемъ на первый планъ формы убиваетъ чутье реального и живаго и дѣлаетъ изъ воспитанниковъ «безплодныхъ мечтателей», рабовъ теоретическихъ построеній, упрямыхъ доктринеровъ, не считающихся съ фактами, въ своей практической дѣятельности одинаково преданныхъ и тогда, когда ихъ теоріи ложны, и тогда, когда онѣ истинны; при столкновеніи съ жизненными фактами всякая теорія, даже обоснованная и выведенная изъ неоспоримыхъ фактовъ, должна примѣняться къ специфической, особенной, никогда не повторяющейся ихъ комбинаціи и соотвѣтственно съ этимъ видоизмѣняться и претерпѣвать ограниченія—понять же это, воспитанные на однихъ теоретическихъ умозрѣніяхъ и на словесныхъ формулахъ никогда не будутъ въ силахъ. Только связь абстрактнаго съ конкретнымъ, ихъ взаимное пропикновеніе въ состояніи первому придать практическую приложимость, а второму — смыслъ и значеніе.

Математика представляет ту особенность сравнительно съ другими науками, что ея содержаніе наиболѣе отвлеченно и наиболѣе далеко отъ конкретнаго міра. Ея научное зданіе строится изъ собственнаго матеріала, которымъ являются понятія аксіомы, опредѣленія и условія, и для сооруженія его она не нуждается, повидимому, ни въ конкретномъ матеріалѣ, доставляемомъ другими науками, ни въ опытной проверкѣ своихъ выводовъ; болѣе, чѣмъ всякая другая наука. математика представляет собою идеальное построение, такъ какъ все ея содержаніе—одна теорія. Находясь, такимъ образомъ, въ полной, повидимому, независимости отъ другихъ наукъ, какъ въ отношеніи своего матеріала, такъ и своихъ обобщеній, математика наиболѣе склонна принять характеръ самоцѣли, самодовольствующей науки, особенно въ школьномъ преподаваніи, и превращаться, такимъ образомъ, въ бесполезную игрушку.

Однако, математика отличается и съ другой стороны отъ остальныхъ наукъ. Именно, математика изучаетъ неизмѣняемую сторону всѣхъ явленій міра; поэтому, если ея конкретное содержаніе ничтожно, то приложеніе ея къ изученію конкретнаго міра безпредѣльно. Въ этомъ ея сила и значеніе. Замыкаясь въ свою собственную область математическихъ символовъ, математика оказывается, можетъ быть, и удивительною по тонкости своего анализа наукой, но зато и вполне бесполезной; напротивъ, въ своихъ приложеніяхъ она дѣлается наиболѣе значительной наукой, распространяющей свое главенство на всѣ остальные. Такимъ образомъ, математика, чтобы быть факторомъ прогресса, должна, подобно другимъ наукамъ, не замыкаться въ кругъ собственныхъ понятій, превращаться въ самоцѣль, но помнить о своемъ служебномъ значеніи для достиженія высшей цѣли — открытія истины; она не должна чуждаться конкретныхъ и жизненныхъ фактовъ; не должна упускать изъ виду, что ея достоинство и оправданіе заключается въ служеніи нуждамъ члѣвческаго общества. Но въ школьномъ преподаваніи всѣ эти простыя истины обыкновенно забываются, и школьная математика носитъ на себѣ ясный отпечатокъ схоластицизма, т. е. удаленности отъ жизни и полной бесполезности.

Въ болѣе широкомъ смыслѣ схоластицизмъ—это рутнна въ области мысли. Онъ возникаетъ всякій разъ, когда научное мышленіе перестаетъ соответствовать потребностямъ и задачамъ времени. Если наука и жизнь опередили движеніе мысли, то наступаетъ разрывъ между содержаніемъ науки и потребностями жизни, въ томъ числѣ и жизненными потребностями самой науки. Въ то время, какъ передовые дѣятели науки двигаютъ ее по пути новыхъ завоеваній, въ высшей школѣ часто продолжаютъ еще господствовать приверженцы старыхъ взглядовъ, пережевывающіе давно отвергнутыя схемы, а въ средней школѣ, несвободной къ тому же въ своей дѣятельности, безраздѣльно царятъ старые методы и старое содержаніе. Представляя въ свое время прогрессивное явленіе, пришедшее на смѣну отжившей мысли, всякое научное направленіе можетъ превратиться въ схоластику, если оно упорно продолжаетъ держаться стараго и не считается съ новыми запросами жизни. Такъ, то направленіе, которое называется схоластикой въ тѣсномъ смыслѣ, было прогрессивнымъ направленіемъ въ свое время; въ періодъ времени отъ Абелия до Оклама оно вполне отвѣчало запросамъ жизни, и терминъ «схоластика» не имѣлъ тогда того отбѣнка, который онъ принялъ впоследствии. Точно также и направленіе эпохи возрожденія, потому смѣнившее схоластику, что лучше ея отвѣчало потребностямъ времени, было прогрессивнымъ явленіемъ; но для насъ оно является теперь въ общемъ схоластическимъ. Было бы схоластикой—не считаться въ настоящее время съ біологическимъ направленіемъ въ естествознаніи и, оставаясь въ кругѣ идей Ляння, полагать въ изученіи систематики всю задачу наукъ о природѣ. Во всѣхъ случаяхъ характеризуетъ схоластику несоотвѣтствіе запросамъ жизни, оторванность отъ ея стремленій и очередныхъ задачъ, и, какъ слѣдствіе этого, преобладаніе вербализма и формализма; въ оправданіе схоластицизма появляются и педагогическія теоріи, усматривающія въ формальномъ развитіи ума главную задачу воспитанія. Такимъ образомъ, схоластицизмъ въ преподаваніи зависитъ отъ общей причины—неистребимой склонности человѣческаго ума къ консерватизму и рутинѣ.

Въ частности, схоластицизмъ школьной математики объясняется историческими условіями ея пропихиванія въ школу. Школа періода схоластики и эпохи возрожденія не чувствовала потребности въ изученіи математики: какъ учебный предметъ, она впервые (такъ какъ нельзя считать за математику арифметику *trivium*) была введена въ свѣтскія школы, основанныя купеческими обществами и члѣдими подъ давленіемъ потребностей жизни, главнымъ образомъ, торговыхъ интересовъ. Но и впоследствии математика съ трудомъ пробивала себѣ дорогу въ школу: и удалось ей утвердиться въ ней вначалѣ только подъ флагомъ науки формальнаго характера, содѣйствующей формальному развитію ума. Эти условія опредѣляли какъ ея содержаніе, такъ и формальный и отвлеченный методъ ея преподаванія, вплоть до настоящаго времени.

Я не буду входить въ разсмотрѣніе того, какъ отражается рутинна на современномъ преподаваніи математики, такъ какъ это не входитъ въ мою задачу. Останься въ сторонѣ ея собственное, математическое содержаніе, я остановлюсь на разсмотрѣніи приложеній математики въ школѣ, т. е. на содержаніи задачъ, разрѣшаемыхъ учащимися, такъ какъ на нихъ наиболѣе ясно можно видѣть удаленность школьной математики отъ жизни и формальный характеръ ея преподаванія.

Наиболѣе сильно сказывается традиція на преподаваніи арифметики. Отъ тѣхъ отдаленныхъ временъ, когда въ началѣ XII в. были открыты въ Италіи рядъ городскихъ школъ купеческими обществами, дошло до насъ нерешенное задачниковъ по арифметикѣ: задачи на куплю-продажу различныхъ товаровъ, главнымъ образомъ, чаю, сахару, кофе, сукна, шелка и бархата. Тогда подобныя задачи имѣли жизненное значеніе, но теперь онѣ стоятъ далеко отъ интересовъ и будущей дѣятельности нашихъ воспитанниковъ, которые, вѣроятно, только въ рѣдкихъ случаяхъ будутъ заниматься мелочной торговлей. Потребностямъ торговца были вызваны и задачи на проценты, занимающія столь видное мѣсто въ нашихъ задачникахъ; но всѣ подобныя задачи правильнѣе было бы отнести въ курсъ коммерческой арифметики, чѣмъ забивать ими головы мало-

дѣльных школьниковъ, не могущихъ составить себѣ никакого представленія о капиталѣ, наростанія его изъ процентовъ, о векселяхъ, о коммерческомъ и особенно о математическомъ учетѣ, никуда, кромѣ школьныхъ задачникковъ, не практикующемся. Изъ тѣхъ же временъ дошло до насъ множество «правиль» простого и сложнаго тройнаго (есть даже семернаго, двадцатернаго), смѣшенія, процентовъ, учета векселей, товарищества, пропорциональнаго дѣленія; сюда же можно было бы отнести правило бассейновъ, курьеровъ, стаи гусей и т. п. Въ учебникѣ Леонардо Фибоначчи 1202 года приводятся еще правила сиплановъ, сѣбнаго, дѣвнцы, пѣвнцы, двухъ человѣкъ съ диниріями, находки кошелька, путешественниковъ, и пр., и пр. — столько же правилъ, сколько задачъ. Въ настоящее время въ задачникахъ сохраняются многочисленные слѣды подобныхъ правилъ: можно ли оправдать это? Въ XIII в. такіе приемы были понятны, потому что тогда алгебра была только нѣмъ зачаткомъ, и общіе способы рѣшенія задачъ не были выработаны; но пользоваться теперь частными приемами, въ то время когда существуютъ обобщенные способы, представляеть чистую схоластику.

Частные способы представляютъ спеціальную догадку на спеціальномъ случаѣ; люди, не обладающіе знаніемъ общихъ способовъ, любятъ упражнять свою догадливость въ нахожденіи рѣшенія подобныхъ частныхъ задачъ, подобно тому, какъ и въ первобытные народы, а также и дѣти, любятъ загадки. Сборникъ такихъ задачъ на догадливость представляетъ сочиненіе Bachel «Problemes plaisants et délectables» (3-ье изданіе Labrousse'a 1874 г.) ¹⁾. Характерно самое заглавіе задачъ, которое часто начинается со слова deviner. Вотъ примѣръ одной задачи: тремъ ревнивымъ мужьямъ пришлось однажды ночью переправляться въѣзѣ со своими женами черезъ рѣку, причѣмъ они наняли только маленькую лодочку безъ перевозчика, настолько узкую, что она могла вмѣстѣ только двухъ человѣкъ; спрашивается, какъ могутъ эти шесть человѣкъ перѣѣхать попарно, такъ чтобы ни разу ни одна жена не оставалась въ обществѣ одного или двухъ чужихъ мужей въ от-

¹⁾ 1-ое изд. 1612 г., 2-ое 1624 г.

существом собственного мужа? Теперь такі задачи не входят, конечно, въ наши задачки, но ихъ главная цѣль—развивать догадливость—сохранилась въ нихъ и теперь неприкосновенною. Однако, можно подвергнуть сомнѣнію, развивается ли въ учащихся догадливость рѣшеніемъ подобныхъ задачъ, и не запоминаютъ ли они просто шаблоны для ихъ рѣшеній, какіе представляютъ, напримѣръ, правила смѣшенія, товарищества, пропорціональнаго дѣленія? Во вторыхъ, если и развивается догадливость, то имѣетъ ли она какое-нибудь значеніе для душевнаго развитія? Въ третьихъ, составляетъ ли эта догадливость математическое развитіе, и можно ли ставить цѣлью преподаванія математики развитіе такой догадливости? На всѣ три вопроса, мнѣ кажется, слѣдуетъ отвѣтить отрицательно. Эти вопросы составляютъ часть другого болѣе общаго вопроса о формальномъ развитіи. Современное его рѣшеніе состоитъ въ томъ, что человѣкъ представляетъ собою орудіе для специальныхъ реакцій на специалныя воздѣйствія; поэтому, упражненіе въ извѣстной области даетъ человѣку развитіе именно въ этой области, а не во всѣхъ. Упражненіе учащихся въ задачахъ на догадливость поведетъ или къ тому, что они механически запомнятъ приемы для ихъ рѣшенія, или же—въ лучшемъ случаѣ—къ тому, что они приобретутъ навыкъ въ рѣшеніи подобныхъ задачъ, что несколько не гарантируетъ такого же навыка и умѣнія въ рѣшеніи задачъ другого рода, напримѣръ, алгебраическихъ или геометрическихъ, а тѣмъ болѣе въ рѣшеніи задачъ изъ другихъ областей знанія или же задачъ жизненнаго характера. Точно также, упражняясь въ рѣшеніи ребусовъ, можно достигнуть высокаго развитія въ этой области и оставаться безпомощнымъ въ другихъ случаяхъ, когда то же требуется догадливость, или, лучше сказать, изобрѣтательная, творческая сила. Это ложное убѣжденіе въ томъ, что рѣшеніе задачъ на догадливость развиваетъ математическія способности, порождаетъ взглядъ, что необходимо во что бы то ни стало требовать отъ учащихся рѣшенія задачъ арифметическимъ путемъ даже и въ томъ случаѣ, если они безъ затрудненія могли бы рѣшить ихъ алгебраическимъ путемъ. Не схоластично ли требованіе поль-

зоваться худшимъ способомъ, когда мы знаемъ лучший? Почему тогда не требовать отъ учащихся, что бы они производили арифметическія дѣйствія надъ числами, изображая ихъ непремѣнно римскими цифрами? Вѣдь пользованіе римскими цифрами несомнѣнно развивало бы извѣстную ловкость и догадливость, правда, только въ ихъ примѣненіи. Наконецъ, не дѣло математики развивать догадливость, потому что ея цѣль гораздо значительнѣе и выше. Допустимо ли пользоваться этимъ замѣчательнымъ орудіемъ изслѣдованія природы для рѣшенія безполезныхъ и никому не нужныхъ вопросовъ и курьезныхъ случаевъ?

Стремленіе развивать умъ съ формальной стороны и ложное убѣжденіе въ томъ, что эта цѣль достигается упражненіями на задачахъ, для рѣшенія которыхъ нужно догадаться примѣнить какой-нибудь особый пріемъ, или же вообще преодолѣть болшія трудности, ведетъ къ появленію задачъ съ парочито запутаннымъ и темнымъ условіемъ. Такія задачи существовали уже въ очень отдаленныя времена и стремленіе составлять ихъ не исчезло и въ наше время. Мнѣ пришлось слышать отъ одного учителя математики, что слишкомъ большая легкость рѣшенія задачъ можетъ развить въ учащихся неуваженіе къ математикѣ, какъ слишкомъ легкой наукѣ. Вотъ примѣръ вліянія рутинны (и въ то же время непониманія психологій и задачъ педагогикі).

Такимъ образомъ, въ результатѣ убѣжденія въ необходимости формальнаго развитія, а также традиціи, идущей отъ тѣхъ временъ, когда математика примѣнялась только для коммерческихъ надобностей, появилась общая черта задачъ, на которыхъ упражняются наши ученики—ихъ удаленность отъ жизни. Правда, матеріалъ ихъ почерпается изъ жизни, но жизненные факты берутся въ такихъ сложныхъ и странныхъ сочетаніяхъ, въ которыхъ они никогда не встрѣчаются въ жизни. Типическій образецъ крайняго удаленія отъ жизни представляетъ извѣстный алгебраическій задачникъ, съ которымъ, конечно, всѣ преподаватели математики знакомы, такъ какъ, повидному, онъ пользуется значительнымъ распространеніемъ, судя потому, что онъ вышелъ уже седьмымъ изда-

ліемъ. Чтобы дать оцѣнку этому задачникъ, достаточно только вообразить себѣ, что мы попали въ городъ, всѣ жители котораго получили свое математическое образованіе по системѣ автора задачника (а это необходимо допустить, потому что въ задачникѣ занимаются математическими вычисленіями даже извозчики). Вы спрашиваете на вокзалѣ у извозчика, сколько онъ возьметъ довести васъ до гостиницы, и получаете въ отвѣтъ требованіе уплатить ему число конфетъ, удовле-
творяющее уравненію

$$\sqrt[4]{2} \sqrt{x-1} + \sqrt[4]{2} \sqrt{x+1} = 6$$

за вычетомъ столькожъ конфетъ, сколько единицъ въ коэффициентѣ того члена разложенія $(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{a^1})^7$ по биному Ньютона, который содержитъ $x^{\frac{7}{4}}$. Вы приходите въ магазинъ купить себѣ холста и на вопросъ о стоимости его получаете подобный же отвѣтъ, требующій для разрѣшенія его нѣсколькихъ часовъ времени. Не скажете ли мы, что фантазія автора уже превосхищена Джонатаномъ Свинфтомъ въ его описаніи жителей острова Лануты, гдѣ портной, чтобы сшить платье, снимаетъ мѣрку только съ большого пальца и размѣры платья вычисляетъ затѣмъ при помощи высшихъ отдѣловъ математики (причемъ платье оказывается нигде не годнымъ, такъ какъ въ вычисленіи вкралась ошибка)? Такой задачникъ представляетъ профанцію математики; пользоваться биномомъ Ньютона для расчетовъ съ извозчиками все равно, что взвѣшивать на химическихъ вѣсахъ говядину на базарѣ, или употреблять античную вазу, какъ почтой горюхъ. Нельзя даже сказать, что бы задачникъ этотъ сдѣлался болѣе пригоднымъ для употребленія, если бы уничтожить въ немъ весь текстъ и оставить только численные примѣры; это не составило бы большого его улучшенія, потому что въ немъ примѣняются различные отдѣлы алгебры въ столь прихотливыхъ и несостоятельныхъ сочетаніяхъ, въ какихъ они нѣгнриое не сопоставляются ни при какомъ научномъ изслѣдованіи реальнаго, а не выдуманнаго вопроса. Съ этой стороны задачникъ вызываетъ въ памяти другого англійскаго юмориста, въ разсказѣ котораго нѣкій господинъ, составляя отъ нечего дѣлать упраж-

ненія для перевода на французскій языкъ, придумалъ между прочимъ такую фразу для повторенія пройденнаго: «Пришелъ громадный левъ и съѣлъ яблоки, садовника, тетку жены моего двоюроднаго дяди, саногги, ваксу и саножную щетку».

Другого рода несоотвѣстствіе съ реальными отношеніями встрѣчается даже въ лучшихъ задачникахъ. Напримѣръ, у Гольденберга ¹⁾ въ числѣ задачъ на составныя именованныя числа встрѣчаются такія, въ которыхъ величина дается съ точностью до ничтожно-малыхъ долей сравнительно со всей величиной. Напримѣръ, № 587. 29 кв. верстъ 34 кв. фута раздѣлить на 8; но что значитъ площадь въ 34 кв. фута сравнительно съ площадью въ 29 кв. верстъ, или 855.250.000 кв. футовъ? Гдѣ можно встрѣтить измѣреніе площадей въ квадратныя версты съ точностью до квадратныхъ футовъ? № 405. Изъ 90 пудовъ вычесть 57 пудовъ 25 фунтовъ 24 золотника; эти 24 золотника при 90 пудахъ имѣютъ значеніе развѣ только при учетѣ золота въ золотосплавочной лабораторіи; точно также счетъ секундъ при нѣсколькихъ суткахъ (№ 415) можетъ встрѣтиться только при астрономическихъ вычисленіяхъ. Подобныя задачи вселяютъ въ сознаніе учащихся превратныя представленія о реальныхъ соотношеніяхъ. Сюда же относится употребленіе для обыкновенныхъ цѣлей логарифмовъ съ 7 десятичными знаками, тогда какъ точность, достигаемая съ ними, требуется только въ астрономическихъ вычисленіяхъ и представляется абсурдной въ примѣненіи къ обыкновеннымъ жизненнымъ случаямъ. Не примѣняется въ жизни превращеніе періодическихъ дробей въ простыя; сравнительно рѣдко встрѣчаются въ жизни конечные результаты арифметическихъ вычисленій, чаще же жизненныя задачи рѣшаются съ приближеніемъ; но на эту сторону въ учебникахъ не обращается вниманіе.

Въ результатѣ подобныхъ упражненій вырабатываются воспитанники, которые, можетъ быть, и наловчились въ рѣшеніи задачъ на бассейны, напомяемые водой и никогда не наполняющіеся, на курьеровъ, которые никогда не встрѣчаются

¹⁾ Гольденбергъ. Сборникъ задачъ и примѣровъ для обученія начальной арифметикѣ. Вып. II-й, изд. 32.

и не догоняютъ другъ друга, потому что теперь такіе курьеры не бѣдятъ, на смѣшеніе разныхъ сортовъ кофе такимъ способомъ, котораго никогда не примѣняли ни одинъ бакалейный торговецъ, на раздѣлъ наслѣдства между братьями, способомъ, который могутъ примѣнять развѣ только ненормальные люди; но ято эти воспитанники оказываются лишенными всякаго чутія реальныхъ соотношеній, вытравленнаго изъ пикъ домашними упражненіями надъ искусственными и нелѣпыми задачами. Всякій житейскій или научный вопросъ люди, воспитанные на подобныхъ приѣмахъ, рѣшаютъ исключительно какъ математическую задачу, нисколько не заботясь о томъ, въ какой степени полученный ими результатъ соответствуетъ дѣйствительности. Примѣровъ такой абераціи ума учащихся можно привести сколько угодно; всякій преподаватель математики знаетъ такіе примѣры и изъ собственной практики, и изъ литературы. Въ одной, кажется, французской статѣ я читалъ объ ученикѣ, который, рѣшая задачу, сколько требуется почтовыхъ марокъ для оклейки стѣны, получилъ въ результатѣ единицу съ дробью и добросовѣстно продолжалъ вычисленіе до десятаго десятичнаго знака и продолжалъ бы вѣроятно вычислять и далѣе, если бы его не остановилъ учитель. Изъ собственной практики я знаю, какъ трудно заставить учащихся давать себѣ отчетъ въ вѣроподобности получаемыхъ ими результатовъ. Опредѣляя въ IV классѣ отношеніе киллограмма къ фунту, ученица получаетъ два раза около 2,45 и одинъ разъ 0,08 и, не задумываясь, выводитъ изъ всѣхъ трехъ чиселъ среднее. Представленіе о единицахъ измѣренія у большинства отсутствуетъ. Профессоръ механики рассказывалъ мнѣ, какъ одинъ студентъ сказалъ ему на экзаменѣ, что метръ равенъ четверти земного меридіана и, сдѣлавъ эту ошибку, съ улыбкой отвѣтилъ на вопросъ профессора, что какъ же метръ можетъ помѣститься въ экзаменаціонной комнатѣ, если онъ такой большой.

Но не слѣдуетъ обвинять учащихся и смѣяться надъ ихъ глупостью; они на самомъ дѣлѣ вовсе не такъ глупы, какъ кажется. Дѣло въ томъ, что наши методы не только не развиваютъ чутія реальнаго, но даже убиваютъ его; между тѣмъ,

эта способность вовсе не такъ обыкновенна среди людей и требуетъ упражненія для своего развитія. Задача математики въ школѣ состоитъ вовсе не въ томъ, чтобы научиться рѣшать фокусныя задачи, и вовсе не въ этомъ умѣніи состоитъ математическое развитіе; нѣтъ, оно состоитъ въ особомъ расположеніи души—въ привычкѣ смотрѣть на окружающій міръ съ точки зрѣнія количественныхъ отношеній, и затѣмъ, конечно, въ извѣстной технической ловкости въ обращеніи съ числами и формулами; къ достиженію этихъ цѣлей, придавалъ преобладающее значеніе первой, и должно стремиться преподаваніе математики въ школахъ; тогда, конечно, сдѣлаются непозможными случаи, вродѣ приведенныхъ.

Въ то время, когда математика только начинала проникать въ школы, изученіе явленій природы было въ зачаточномъ состояніи и совершалась только эмпирическимъ, но не научнымъ методомъ; запасъ реальныхъ знаній научной цѣности былъ въ то время очень невеликъ. Поэтому единственное почти примѣненіе математики заключалось только въ рѣшеніи задачъ на коммерческія сдѣлки и было почти исключительно утилитарнымъ. Но съ тѣхъ поръ наука совершила громадныя завоеванія. Подъ вліяніемъ расширявшагося изученія природы развивалась и математика и изобрѣтала новые методы. Безъ астрономическихъ трудовъ Кеплера не было бы, быть можетъ, дифференціальнаго исчисленія, на нашихъ глазахъ требованія политической экономіи, статистики и естественныхъ наукъ вырабатываютъ новые методы въ теоріи вѣроятностей. Такимъ образомъ, передъ математикой стоятъ теперь другія задачи, чѣмъ тѣ, которыя стояли передъ ней когда-то. Математика является теперь необходимымъ орудіемъ познанія міра, качественное знаніе съ развитіемъ математики постепенно смѣняется количественнымъ, индуктивный методъ изслѣдованія стремится перейти въ дедуктивный. Всѣ вещи въ мірѣ имѣютъ количественную сторону и подлежатъ измѣренію, начиная со счета яблокъ въ корзинѣ торговли и вплоть до вычисленія движенія небесныхъ тѣлъ и до механики атомовъ. Такимъ образомъ, поле приложенія математики безпредѣльно; мы не знаемъ, есть ли также предѣлы и развитію ея мето-

довѣ. Въ этомъ состоитъ значеніе математики, какъ всеобщей истолковательницы явленій міра, изученію котораго посвящаютъ себя всѣ остальные науки. При такомъ пониманіи сущности и задачъ математики передъ преподавателемъ ея возникаетъ несравненно болѣе значительная, благодарная и завлекательная цѣль, чѣмъ натаскиваніе ученика въ рѣшеніи никому не нужныхъ, никогда и нигдѣ не встрѣчающихся, бесполезныхъ, чуждыхъ и скучныхъ задачъ. Пустьъ, ему предстоитъ развить въ ученикѣ способность смотрѣть на міръ и оцѣнивать его явленія съ количественной точки зрѣнія; уяснить ему значеніе математики на его собственномъ опытѣ, какъ необыкновенно тонкаго орудія для ихъ изслѣдованія и установленія законовъ природы; дать ему почувствовать красоту порядка, вносимаго математикой въ наше представленіе о мірѣ, въ которомъ по словамъ поэта, «Богъ все распредѣлилъ по мѣрѣ, числу и вѣсу»; наконецъ, научить его пользоваться этимъ орудіемъ, но не для безполезныхъ и глухихъ, а для благородныхъ и возвышенныхъ цѣлей. Какъ жалка и ничтожна въ сравненіи съ этой задачей школьная работа нашихъ учениковъ!

Для достиженія этой цѣли, конечно, имѣетъ большое значеніе и техническая ловкость, развиваемая рѣшеніемъ, такъ называемыхъ, примѣровъ; но сама по себѣ она не составляетъ конечной цѣли, и не для того, чтобы овладѣть ею должны ученики работать, подобно тому, какъ играютъ на роялѣ эгоисты не для нихъ самихъ, а для того, чтобы вносилъ результатъ играть сонаты Бетховена. Для упражненія въ техническомъ навыкѣ нужно отвести въ задачникѣ мѣсто численнымъ и буквеннымъ примѣрамъ; но чтобы умѣнье рѣшать ихъ не превратилось въ самоцѣль, въ пустую форму, нужно дать преобладающее значеніе задачамъ съ содержаніемъ, которое должно быть тщательно подобрано. На этихъ задачахъ ученики будутъ приучаться пользоваться математикой для приложений, что и составляетъ ея главную задачу, если не считать ее за самоцѣль. Такъ какъ эти приложения безирредѣльны, то нужно дать ихъ изъ всѣхъ областей, доступныхъ ученику: изъ обыденной жизни, изъ наукъ, изучаемыхъ ученикомъ въ школѣ, изъ области

техники, статистики, политико-экономических отношений, товарообмена и т. д. и т. д. Не только не нужно, чтобы условия задач были запутаны и сложны, но даже необходимо, чтобы они были просты и понятны; не только лишняя, но и вредны бесконечныя передѣлки, которыми такъ любятъ щеголять наши задачки. Въ особенности важно соблюдать простоту и понятность на первыхъ ступеняхъ обученія. Пусть ничего легче, какъ составить замысловатую задачу и на первыхъ же порахъ ошеломить ребенка мудренымъ условіемъ, вселивъ въ него этимъ самымъ на всю жизнь отвращеніе къ математикѣ. Гораздо труднѣе, но зато и почетнѣе для преподавателя, ввести ребенка постепенно, шагъ за шагомъ, безъ напилья въ міръ математическихъ символовъ, сдѣлавъ для него привычнымъ и приятнымъ обращеніе съ ними. Необходимымъ условіемъ должно быть соответствіе содержанія задачъ съ реальными фактами; все искусственное, никогда не бывавшее или несуществующее теперь, должно быть устранено изъ нихъ; нужно, чтобы онѣ были отраженіемъ самой жизни въ ея теперешнемъ состояніи; чтобы онѣ будили интересъ ученика, обогащали его умъ свѣдѣніями и наталкивали его на новыя и самостоятельныя изслѣдованія явленій жизни и науки съ ихъ количественной стороны; ихъ руководящей идеей долженъ быть лозунгъ—школа для жизни въ ея безконечно разнообразныхъ проявленіяхъ.

На всѣхъ ступеняхъ обученія содержаніе задачъ должно браться изъ круга близкихъ и доступныхъ ученикамъ понятій; но въ особенности это имѣетъ значеніе при началѣ обученія. Очень часто затрудняетъ учащихся не математическая сторона задачи, но отсутствіе реальныхъ представленій, необходимыхъ для пониманія ея содержанія. Какъ можетъ ученикъ приготовительнаго класса рѣшать задачу о числѣ буквъ, набираемыхъ наборщикомъ, если онъ никогда не видалъ работы въ типографіи? На первыхъ ступеняхъ обученія, когда учащіеся имѣютъ очень ограниченный запасъ реальныхъ свѣдѣній, содержаніемъ задачъ должны служить факты дѣтской жизни, наиболѣе имъ знакомые и близкіе ихъ янтересамъ, постепенно содержаніе задачъ должно расширяться. По мѣрѣ того, какъ на урокахъ

міровѣднія или отечественнаго языка учащіеся знакомятся съ новыми фактами съ ихъ качественной стороны, на урокахъ математики тѣ же факты могутъ изучаться съ ихъ количественной стороны. Такимъ образомъ, изученіе математики будетъ идти рѣдѣ рѣдѣ съ умноженіемъ свѣдѣній учащихся; такое же соотношеніе между математикой и другими науками должно соблюдаться и въ послѣдствіи. Польза такой постановки дѣла очевидна; повтореніе и углубленіе на урокахъ математики вопроса, изученнаго на урокѣ другого учебнаго предмета, разсмотрѣніе его количественной стороны, служить какъ для лучшаго его усвоенія, такъ и для уясненія связи математики съ другими науками и ея значенія. Вездѣ, гдѣ только возможно, нужно пользоваться измѣреніями; разстоянія, длины, площади, вѣса, объемы должны оцѣниваться учащимися и на глазъ, и измѣряться посредствомъ приборовъ. Для этого въ классѣ должны быть всегда наготовѣ вѣсы, аршинныя, метры, измѣрительные цилиндры. Выѣстъ съ этимъ можетъ быть сведенъ до минимума тяжелый и скучный отдѣлъ объ именованныхъ числахъ. Можно много придумать задачъ, въ которыхъ дано только содержаніе, а числа должны доставить сами учащіеся. Сколько шаговъ отъ вашего дома до школы? Измѣрьте длину классной комнаты шагами, потомъ аршинами; пойдите, сколькою вершикамъ равняется длина вашего шага и выпишите, сколько саженой отъ вашего дома до школы. Сколько понадобится кусковъ обоевъ для оклейки вашей комнаты? Сколько десятинъ занимаетъ ваша улица или часть ея, скверъ, въ которомъ вы играете. Кубическое содержаніе класса? нашей комнаты? сколько кубическихъ футовъ приходится на одного ученика? И проч., и проч. Примѣромъ задачъ, заставляющихъ жизненные темы и приспособленныхъ къ интересамъ и пониманію дѣтей, можетъ служить напримѣръ задачникъ Hellermann'a и Krämer'a для городскихъ школъ, отдѣльными тетрадями котораго вышли уже 232, 240 и даже 270 изданій. Вотъ темы задачъ: 1-ый годъ; трудовая недѣля, рождественская елка, игры, сберегательная касса, почта, семья, жилище, кухня, ѣда и питье, мелкія покупки, школа. 2-ой годъ: часы, недѣля, годъ; деньги; садъ, поле, деревенскій дворъ, школа;

зданіе, книги, тетради, учебныя занятія, пропуски уроковъ; булочникъ, кунецъ, перенлетчикъ; домашняя жизнь. 3-ій годъ: доходы и расходы семьи, почтовые марки, открытїя. 4-ый изъ географіи: Берлинъ: число жителей, призрѣніе бѣдныхъ, движеніе иногороднихъ, пассажирское движеніе по городскимъ трамваямъ, почтовые обороты, бойни, городскія школы, городскіе доходы; провинція Бранденбургъ: населеніе, распределеніе земельныхъ угодій, сборъ хлѣбовъ; королевство Пруссія: площадь областей, населеніе; Германская Имперія: населеніе, распределеніе его по вѣроисповѣданію, внѣшняя торговля, имперскіе доходы и расходы; объ арміи; о зашитѣ животныхъ (нормы, приносимая ими); о скоростяхъ. 5-ый годъ: бумажныя деньги, запись дохода и расхода, росписаніе желѣзно-дорожныхъ поѣздовъ; изъ отчизновѣдѣнія, изъ географіи Европы. Подобнымъ же образомъ усложняется содержаніе задачъ и въ послѣдующіе годы ¹⁾.

По мѣрѣ того, какъ учащіеся поднимаются въ классахъ и увеличивается запасъ ихъ фактическаго знанія, должны доставлять матеріалъ для задачъ новыя, изучаемыя ими, предметы. Очень хорошо, если въ младшихъ классахъ ведутся практическія занятія по естественной исторіи и проходится наглядная или питуитивная геометрія; въ этомъ случаѣ можно сильно увеличить разнообразіе задачъ. Много темъ даютъ факты изъ жизни животныхъ и растений, сообщаемые на урокахъ естественной исторіи. Вычислить потомство мухи въ теченіе мѣсяца; сколько гусеницъ или насѣкомыхъ съѣсть въ теченіе мѣсяца пѣвчая птичка или ласточка; самъ сколько дать урожаи хлѣба.— вотъ примѣры такихъ задачъ. Наглядная геометрія даетъ много темъ, въ томъ числѣ для 3-го класса—темъ геодезическаго характера; напримѣръ, опредѣлить высоту дерева, ширину рѣки, разстояніе между двумя точками, изъ которыхъ одна недоступна, и проч. Много задачъ можетъ быть составлено на измѣреніе площадей и объемовъ. Въ связи съ практическими работами по физикѣ въ 4-мъ классѣ, она даетъ темы такого рода, какъ

¹⁾ На русскомъ языкѣ мнѣ извѣстенъ задачникъ г. Лубсца, содержаніе задачъ котораго взято изъ крестьянской жизни

опредѣленіе вѣса и стоимости куска золота или серебра правильной геометрической формы. Между прочимъ, я лично присутствовалъ при рѣшеніи подобныхъ задачъ въ 4-мъ классѣ лица въ Парижѣ, хотя тамъ этимъ управленіямъ не предпослѣдуетъ курсъ наглядной геометріи. Географія даетъ большое количество темъ уже въ младшихъ классахъ, а въ старшихъ можетъ дать еще больше. Который часъ въ Лондонѣ, когда въ нашемъ городѣ 12 часовъ? Съ какой быстротой мы движемся вслѣдствіе вращенія земли? Во сколько разъ быстрее движется житель экватора въ сравненіи съ нами? На какой параллели (приблизительно) находится солнце сегодня? Вычислить приблизительно по картѣ площадь страны. Затѣмъ безконечно - разнообразны темы, доставляемыя статистикой, отъ самыхъ простыхъ до самыхъ сложныхъ, почему ими можно пользоваться на всѣхъ ступеняхъ обученія. Между прочимъ, именно для рѣшенія подобнаго рода задачъ слѣдовало бы приспособить ученіе о процентахъ въ 3-мъ классѣ, а не для рѣшенія задачъ на коммерческія сдѣлки. Для учениковъ этого класса еще совершенно неясны функціи капитала, и эти задачи представляютъ для нихъ затрудненіе главнымъ образомъ по существу, а не съ ихъ математической стороны. Въ наукѣ же чаще находятъ примѣненіе проценты, какъ способъ сравненія между собой одинаковыхъ долей сложнаго цѣлаго; съ этой точки зрѣнія было бы полезно отнестись коммерческіе проценты до старшихъ классовъ, а въ младшихъ приучать учащихся къ пониманію процентовъ какъ дробей, приведенныхъ для удобства сравненія къ одному знаменателю, которымъ выбрано число 100, съ той же цѣлью удобства при умноженіи и дѣленіи. Полезно было бы употреблять не только проценты, но и промилли въ подходящихъ случаяхъ. Начиная съ 4 и особенно съ 5 класса громадное число темъ для задачъ можетъ и должна доставлять физика, а позже химія, космографія, физическая географія; въ старшихъ классахъ математика должна пользоваться всѣмъ запасомъ научныхъ свѣдѣній учащихся. Опытъ подобнаго задачника представляютъ сборники задачъ съ примѣненіемъ къ общественной жизни, геометрія, физики, астрономіи, мореплаванію, техники и политической экономіи, соста-

вленные Schülke (издания 1902 и 1906 г.). Широкое мѣсто должно быть отведено въ задачникѣ графическому методу. Съ этимъ приѣмомъ изученія явленій можно начать знакомить учащихся уже съ I класса, приучая ихъ наносить на миллиметровую бумагу результаты ихъ ежедневныхъ наблюденій температуры воздуха, а позже и барометрическаго давленія. Въ старшихъ классахъ слѣдуетъ примѣнять графическій методъ для выраженія результатовъ опытовъ, производимыхъ учащимися на практическихъ занятіяхъ по физикѣ. Полезно также приучать учащихся къ составленію графикъ по коммерческой географіи или, что то же, по статистикѣ. Такимъ образомъ, воѣ науки, изучаемыя въ школѣ, будутъ приносить свою долю помощи для усвоенія математическихъ понятій.

Задачи, подобныя тѣмъ, содержаніе которыхъ набросано выше, должны имѣть большое значеніе для умственнаго развитія учащихся. Такая задача все время удерживаетъ воспитанника на почвѣ реальности, потому что онъ рѣшается не только какъ математическая задача, вродѣ численныхъ или буквенныхъ примѣровъ, но и какъ вопросъ, имѣющій реальное значеніе. Поэтому на такихъ задачахъ учащимся приходится оцѣнивать реальную возможность полученнаго ими результата. Многочисленными примѣрами эти задачи показываютъ учащимся связь математики съ реальной жизнью и наукой; учащемуся постепенно выясняется значеніе математики, какъ всеобщей истолковательницы явленій, какъ того орудія, при помощи котораго строятся научныя теоріи и двигается впередъ матеріальная культура. Постепенно учащійся проникается убѣжденіемъ, что всякая вещь въ мірѣ имѣетъ кромѣ качественной и количественную сторону, и привыкаетъ смотрѣть на явленія міра съ точки зрѣнія количественныхъ отношеній, въ этомъ и состоитъ математическое развитіе, а не только въ технической ловкости, т. е. въ умѣнии производить математическія передѣлки, не понимая того, какія явленія реального міра символизируютъ полученный результатъ. Сознаніе такого всеобщаго значенія математики дѣйствительно вызоветъ въ учащихся уваженіе къ этой «царицѣ наукъ», тогда какъ нелѣпыя задачи нашихъ задачниковъ, вродѣ тѣхъ, гдѣ хозяйка распла-

чивается съ кухаркой вмѣсто денегъ шелкомъ и бархатомъ, какъ будто не имѣютъ другой цѣли, какъ доказать учащимся, что математика — пустая и ни къ чему полезному не пригодная наука.

Однако, составленіе подобнаго задачника дѣло не легкое. Передъ составителями распространенныхъ теперь задачниковъ возникла въ сущности одна трудность — разработка математическаго матеріала, приспособленіе его къ теоретическому курсу о содержаніи же задачъ составители ихъ мало заботились. Поэтому и дожили до нашихъ дней типы задачъ чуть не изъ сборника Алкуина, и всѣ эти задачи на курьеровъ и на басейны. Но для составителя задачника въ разсматриваемомъ мною духѣ присоединяются къ этой новой трудности; во-первыхъ, приспособленіе данныхъ реальнаго мира и данныхъ науки для математической разработки, соответственно теоретическому курсу и пониманію дѣтей; во-вторыхъ, выборка подходящихъ для этой разработки данныхъ изъ всей безгранично-разнообразной области науки и человѣческихъ отношеній. Поэтому, мнѣ кажется, что составленіе такого задачника должно было бы быть коллективнымъ дѣломъ; съ одной стороны въ немъ должны принять участіе спеціалисты въ разныхъ областяхъ знанія, доставленіемъ соответствующаго содержанія и численныхъ данныхъ, оценивая при этомъ его значеніе съ точки зрѣнія своей науки; съ другой стороны математики разрабатывали и приспособляли бы этотъ матеріалъ съ математической стороны.

Позволю себѣ поставить на обсужденіе Съѣзда слѣдующіе вопросы:

1) Желательно ли составленіе подобнаго задачника; 2) желательно ли его составленіе коллективными силами; 3) если желательно, то въ какомъ видѣ могло бы оно осуществиться».

Т е з и с ы.

1. Сущность науки составляетъ общее и отвлеченное, въ противоположность единичному и конкретному. Поэтому наука дѣлается тѣмъ болѣе научной, чѣмъ болѣе она удаляется отъ конкретныхъ фактовъ.

2. Однако научныя отвлеченія и обобщенія основываются исключительно на конкретных фактахъ, а не создаются самостоятельной и независимой дѣятельностью ума.

3. Поэтому для правильнаго развитія науки необходима непрерывная провѣрка ея обобщеній на ихъ согласіе съ дѣйствительностью.

4. Съ другой стороны, если наука имѣетъ не самоцѣльное значеніе, а служить для регулированія и направленія нашего поведенія, то это ея значеніе обеспечивается точно также непрерывнымъ установленіемъ связи науки съ конкретными и жизненными фактами.

5. Съ педагогической точки зрѣнія это означаетъ, что наука должна изучаться въ школѣ въ ея отношеніяхъ къ жизненнымъ и научнымъ фактамъ. Нужно научить въ школѣ примѣнять общія положенія къ единичнымъ конкретнымъ случаямъ.

6. Въ отношенія къ означеннымъ фактамъ, изученіе науки въ школѣ вырождается въ схоластицизмъ, ведетъ къ потерѣ учениками чувства реальнаго и вырабатываетъ изъ нихъ пустыхъ фразеровъ, непригодныхъ для жизни.

7. Въ математикѣ жизненное и реальное направленіе преподаванія достигается примѣненіемъ ея ко всей области знаній, сообщаемыхъ ученику (физика, химія, естествознаніе, географія).

8. Для достиженія этой же цѣли, содержаніе математическихъ задачъ должно имѣть отношеніе къ жизни и къ тому, что изучается въ школѣ, а также къ кругу интересовъ ученика, соответственно его возрасту; не должны допускаться задачи, содержаніе которыхъ искусственно, выдуманно, нелѣпо и стоитъ въ противорѣчій съ жизненными фактами. Оно должно быть таково, чтобы на дѣлѣ показать безконечную приложимость математики къ изученію всѣхъ явленій міра.

9. Составленіе такого задачника, матеріалъ котораго взять изъ безконечно-разнообразной области науки и человѣческихъ отношеній, представляетъ настоящую потребность.

10. По его составленію не подѣ силу одному лицу,—оно должно быть коллективнымъ дѣломъ многихъ специалистовъ.

VIII. Обоснованіе ариметическихъ дѣйствій.

Докладъ В. А. Соколова (Майкопъ, Кубанской обл.).

«1. Положимъ, буква A означаетъ предметъ, определенно отличный отъ другихъ предметовъ, C —собрание предметовъ A или одно A , притомъ обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ: если отъ C отдѣлать и слѣдовательно по одному A , то можно дойти до уничтоженія

Я буду говорить, что одно C находится съ другимъ C въ связи c , если элементы (отдѣльные A) одного C связаны въ нашей мысли съ элементами другого C такъ, что каждое одного связано съ однимъ и только съ однимъ A другого обратно.

2. Всѣ C , въ которыхъ определенно указаны элементы A , можно раздѣлить на виды по слѣдующему признаку (признакъ r): если между однимъ C и другимъ возможна связь c , то онъ одного вида, если—нѣтъ, то разныхъ.

Дѣйствительно, легко доказать, 1) что сужденіе о томъ принадлежитъ ли одно C къ одному виду съ другимъ не зависитъ отъ порядка, въ которомъ мы перебираемъ элементы при установленіи связи c , 2) что отношеніе одного C къ другому, определяемое возможностью между ними связи c , транзитивно. Кромѣ того, для каждаго C мы или найдемъ въ реальномъ мірѣ или можемъ создать хотя бы въ нашей мысли другое C , съ которымъ данное можетъ быть въ связи c .

Положимъ, M одно изъ C . Всѣ другія C , которыя могутъ быть связаны съ M связью c составляютъ одинъ видъ потому что они всѣ могутъ быть связаны этой связью другъ съ другомъ. Если M есть новое c , принадлежащее къ одному виду съ M , то M , какъ и M , даетъ основаніе новому виду и т. д.

Такимъ образомъ, каждое C будетъ въ этой системѣ принадлежать какому-нибудь виду. Оно будетъ принадлежать только къ одному, потому что

при допущеніи противоположнаго, мы пришли бы къ заключенію, что C одного вида могутъ быть связаны съ C другого связью c , т. е., что два вида сливаются въ одинъ.

3. Виды могутъ быть опредѣлены по ихъ представителямъ, хорошо намъ извѣстнымъ и удобнымъ для изслѣдованія. Такихъ представителей всѣхъ возможныхъ видовъ даетъ намъ рядъ словъ и знаковъ повторяющихся всегда въ одномъ и томъ же порядкѣ: 1, 2, 3, 4

a	b	d
1	2	3

написанное здѣсь собраніе буквъ a , b , c одного вида съ собраніемъ знаковъ 1, 2, 3.

Знаки 1, 2, 3... называются числовыми символами. Последнее изъ нихъ всегда опредѣляетъ все собраніе предшествующихъ, а, слѣдовательно, опредѣляетъ и его видъ по признаку r (см. 2).

4. Числовые символы опредѣляютъ собой видъ C въ указанной выше системѣ; нѣкоторые изъ нихъ условливаются считать именами этихъ видовъ, но я не буду употреблять слова одинъ, два, и т. д. какъ имена видовъ.

Въ моемъ обозначеніи имена видовъ будутъ одно A , два A и т. д. (значеніе A см. 1).

Если всѣ A , входящія въ составъ даннаго C (напр. $3A$), кромѣ свойства соизначаемаго именемъ A (опредѣленная огличимость одного отъ другого) обладаютъ еще какимъ-нибудь общимъ свойствомъ, то по этому общему свойству имъ можетъ быть дано общее имя, это имя можетъ быть поставлено въ сложное имя собраніе $3A$ вмѣсто буквы A , напр., собраніе a b и d , гдѣ элементы a , b и d будутъ носить имя трибуны.

Числовой символъ, поставленный передъ именемъ предмета, опредѣляетъ собой операцію, которая, будучи приложена къ названному за нимъ предмету, даетъ собраніе, опредѣляемое всѣмъ сложнымъ именемъ. Въ этомъ числовой символъ

совершенно подобенъ знаку f въ обозначеніи функціи $f(t)$. Операцию эту я буду называть умноженіемъ предмета A на числовой символъ.

Умноженіе производится, какъ показано на планѣ справа. Въ разныхъ частныхъ случаяхъ это умноженіе называется отсчитываніемъ, отмѣриваніемъ...

1	2	3
буква	буква	буква

Предметъ, имя котораго стоитъ въ названіи C послѣ числового символа, я буду называть предметной единицей.

6. Дѣйствія надъ чистыми числовыми символами основываются на слѣдующемъ принципѣ.

Въ случаяхъ сложения, вычитанія, умноженія и дѣленія, числовой символъ результата опредѣляется числовыми символами данныхъ и не зависитъ отъ единицы.

Въ этомъ докладѣ докажу его только для умноженія, но его можно доказать для всѣхъ дѣйствій и надъ всякими числовыми символами.

7. Положимъ C есть nB , и B есть mE . Здѣсь m и n числовые символы.

Имена mE и B означаютъ здѣсь одни и тѣ же предметы, эту равносильность именъ B и mE я обозначу такъ: $B \stackrel{m}{=} mE$

При этомъ условіи $nB \stackrel{m}{=} n(mE)$.

Докажемъ, что $n(mE)$ есть нѣкоторое C не только по отношенію къ элементу mE , но и по отношенію къ элементу E .

$n(mE)$ есть C , видъ котораго по отношенію къ элементу mE опредѣляется (r) символомъ n . Поэтому мы можемъ связать всѣ mE , входящіе въ $n(mE)$, связью s съ рядомъ

1,	2,	3,	...	n
знаковъ	знаковъ	знаковъ	знаковъ	знаковъ
mE	mE	mE	...	mE

По свойству C , мы, отдѣляя по одному E , можемъ уничтожить mE , связанное съ любымъ изъ знаковъ $1, 2, \dots, n$. Слѣдовательно, отдѣляя по одному E , мы можемъ уничтожить одно за однимъ послѣдовательные mE въ $n(mE)$, а въ

такомъ случаѣ, по свойству C мы можемъ дойти до уничтоженія $n(mE)$. Итакъ, отдѣляя по одному E , мы можемъ дойти до уничтоженія $n(mE)$, слѣдовательно, $n(mE)$ есть нѣкоторое C изъ E . Положимъ, видъ его опредѣлится числовымъ символомъ p , т. е. $n(mE) \sim pE$.

Докажемъ, что p не зависитъ отъ E и вполнѣ опредѣляется символами m и n . Опредѣлить p значитъ опредѣлить видъ даннаго C въ указанной выше системѣ. Опредѣлимъ его по представителю, который составимъ такъ:

	1	2	3	...	m
1	1	1	1	...	1
2	1	1	1	...	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
n	1	1	1		1

Докажемъ, что собраніе черточекъ въ этой таблицѣ одного вида (по признаку r) съ $n(mE)$, каково бы ни было E .

Собраніе черточекъ есть собраніе n рядовъ, слѣдовательно, принимая за элементы рядъ n mE , мы можемъ установить такую связь (c), что каждый рядъ будетъ связанъ съ однимъ mE и только съ однимъ, и обратно. Соединимъ всѣ черточки каждаго ряда съ E соответственныхъ собраній mE , связью c , тогда собраніе $n(mE)$, рассматриваемое какъ собраніе элементовъ E , будетъ связано связью c съ черточками таблицы. Слѣдовательно, таблица, какъ собраніе черточекъ одного вида $n(mE)$ или pE , и видъ pE , а съ ними и числовой символъ p опредѣлится по приведенной таблицѣ, которая вполнѣ опредѣляется числовыми символами m и n и не зависитъ отъ p . Итакъ p вполнѣ опредѣляется числовыми символами m и n . Назовемъ p произведеніемъ символа m на символъ n , операцію, въ которой находится это произведеніе, умноженіемъ, и будемъ обозначать произведеніе m на n сложнымъ символомъ $n.m$, т. е. примемъ, что $p = n.m$.

На основаніи этого условія

$$(a) \quad n(mE) \sim (n.m)E$$

Въ послѣднемъ равенствѣ (по тождеству означаемыхъ классовъ) E означаетъ какой угодно предметъ изъ класса

А (см. 1). Этотъ предметъ самъ можетъ быть собраніемъ и опредѣляться при помощи числового символа и единицы.

Равенство a даетъ основаніе для вывода свойства сочетательности при умноженіи числовыхъ символовъ. Оно же выражаетъ и условіе применимости числовыхъ символовъ и дѣйствій надъ ними къ реальнымъ предметамъ.

Пренія по докладу В. А. Соколова.

На предложеніе предсѣдателя собранія высказаться по поводу заслушаннаго доклада никто изъ присутствовавшихъ не отозвался.

Предсѣдатель Собранія, *Б. Б. Пютровскій*, считаетъ необходимымъ отмѣтить слѣдующее:

„Докладчикомъ затронутъ весьма интересный и трудный, какъ въ научномъ, такъ и въ педагогическомъ отношеніяхъ, вопросъ объ основныхъ понятіяхъ ариѳметики.

Устанавливая понятіе о числѣ, докладчикъ, видимо, имѣлъ въ виду исходить при этомъ изъ понятій: объ ансамблѣ (комплексѣ), объ однозначномъ соотвѣтствіи элементовъ ансамбля и объ ансамбляхъ одинаковой мощности.

Такая система построения основъ ариѳметики проведена, между прочимъ, въ „Энциклопедіи элементарной математики“ Вейера и Вельштейна.

Не входя въ подробный разборъ настоящаго доклада, приходится, однако, отмѣтить, что какъ указанныя выше понятія, такъ и предложенное докладчикомъ обоснованіе ариѳметическихъ дѣйствій, основанное на этихъ понятіяхъ, изложены недостаточно ясно и методически не разработаны, и поэтому докладъ В. А. Соколова врядъ ли что-нибудь внесетъ въ рѣшеніе вопроса объ обоснованіи ариѳметическихъ дѣйствій съ точки зрѣнія интересовъ преподаванія“.

IX. Сообщеніе А. В. Годнева (Симбирскъ).

Основные положенія, которыми руководствовался А. В. Годневъ при составленіи своего труда по геометріи, и его особенноти сводятся къ слѣдующему.

Для упрощеннаго построенія геометріи и расширенія ея содержанія, слѣдуетъ:

А) разсматривать движеніе геометрическихъ элементовъ, коимъ образуются геометрическія фигуры, не какъ неизбежное зло при построеніи геометрической науки, а какъ вспомогательное орудіе построенія, логически выполнѣ законное и въ высшей степени важное.

В) для полученія сложнаго, а не отрывистаго построенія геометрическихъ фигуръ ввести аксіомы: какъ непрерывности фигуръ, образуемыхъ движеніемъ, непрерывныхъ геометрическихъ элементовъ, такъ и соответствующей непрерывности измѣряющихъ эти фигуры чиселъ.

Переходя затѣмъ къ самому построенію геометріи въ частности, получаемъ, не вводя новыхъ постулатовъ, выводы:

1) что къ каждой точкѣ на бесконечныхъ прямыхъ линияхъ прилежатъ равныя (по совместиности при наложеніи) бесконечныя прямыя;

2) что къ каждой точкѣ, взятой на какихъ угодно бесконечныхъ плоскостяхъ, прилежатъ равныя бесконечныя плоскости (по совместиности при наложеніи);

3) новое опредѣленіе линейнаго угла, какъ отклоненіе другъ отъ друга пересѣкающихся прямыхъ линій при точкѣ ихъ пересѣченія;

4) понятіе о полномъ линейномъ углѣ. Равенство полныхъ линейныхъ угловъ и его важныя слѣдствія;

5) взглядъ на кривыя линіи, какъ на линіи непрерывноломанныя. Важность обобщенія ломанныхъ и кривыхъ линій.

6) доказательство равенства большей части геометрическихъ фигуръ опирается на единичность способа ихъ построенія изъ даннаго числа одинаковыхъ ихъ элементовъ;

7) новый постулатъ въ теоріи параллельныхъ линій, опредѣляющій ихъ эквидистантность; неприводимыя нынѣ слѣдствія этого постулата.

8) идеальное понятіе о минимальной, ближайшей по величинѣ къ нулю, части прямой линіи и соизмѣримость всѣхъ отрѣзковъ прямыхъ линій при дѣленіи на эту часть;

- 9) построение всѣхъ симметрическихъ фигуръ;
 10) новая теорія подобія плоскихъ геометрическихъ фигуръ;

[1] доказательство принципа Кавальери по отношенію къ плоскимъ геометрическимъ фигурамъ.

Пренія по сообщенію А. В. Годнева.

В. Я. Гебель (Москва) обратилъ вниманіе Собранія на то, что трудъ г. Годнева представляетъ собой опытъ составленія учебника въ соотвѣтствіи съ новымъ направленіемъ преподаванія геометріи: авторъ вводитъ, напримѣръ, элементы движенія понятіе о гомотетіи—съ этой точки зрѣнія трудъ г. Годнева и его сообщеніе представляютъ интересъ.

Б. Б. Піотровскій (Сиб.). „Въ трудѣ г. Годнева есть такіе пункты, относительно которыхъ необходимо высказаться въ настоящемъ собраніи. Я имѣю ввиду опредѣленіе кривой, какъ линіи «непрерывно ломаной» и понятіе «о минимальной, ближайшей по величинѣ къ нулю, части прямой»“.

„Опредѣленіемъ кривой, какъ непрерывно-ломаной, докладчикъ предлагаетъ избѣжать понятія о предѣлѣ и этимъ упроститъ изложеніе нѣкоторыхъ вопросовъ курса геометріи—въ томъ или иномъ видѣ такія понятія давно дѣлались, ихъ логическая несостоятельность установлена“.

„Что же касается до понятія о минимальной, ближайшей къ нулю, части прямой, то это понятіе вноситъ какой-то метафизическій характеръ въ математическія понятія. Я полагаю, что слѣдуетъ рѣшительно высказаться о непріемлемости предложеній докладчика въ указанныхъ пунктахъ“.

М. Е. Волокобинскій (Рига), вполне присоединяясь къ словамъ предсѣдателя, указываетъ, что ломаніе прямой линіи, неизвѣстно по какому способу, можетъ и не привести къ окружности. Необходимо доказать, что такая кривая, полученная изъ непрерывно-ломаной линіи, будетъ замкнута и будетъ непрерывно-окружностью. Въ курсахъ геометріи точка зрѣнія автора проводилась и мысль признана несостоятельной. Книга г. Годнева является шагомъ назадъ.

Третье засѣданіе

2 января 1912 г. 8 ч. веч.

Предсѣдательствовалъ М. Г. Попруженко.

Пренія по докладу В. Р. Мрочка.

(См. стр. 68).

Д. Л. Волковскій (Москва) сдѣлалъ слѣдующія возраженія:
1) классификація направленій въ методикахъ ариѳметики, указанная г. Мрочкомъ, несостоятельна, такъ какъ эта классификація невѣрна по существу и не характерна для методическихъ взглядовъ нѣкоторыхъ методистовъ; такъ, напр., между методическими взглядами Евтушевскаго и Гольдсберга—громаднѣйшая разница, а г. Мрочекъ отнесъ ихъ къ одному направленію.

2) Характеристика методическихъ взглядовъ Гольденберга невѣрна. Г. Мрочекъ находитъ «глубокій разладъ между Методикой ариѳметики Гольденберга и его же Бесѣдами по счисленію». Между тѣмъ, здѣсь нѣтъ никакого разлада, а есть путь эволюціи во взглядахъ почтеннаго методиста, а такой путь есть естественный путь въ развитіи человѣка.

3) Утвержденіе, что методики гг. Арженикова, Беллюстина «перекроены изъ другихъ методикъ» невѣрно, такъ какъ въ этихъ методикахъ есть нѣкоторыя особенности, присущія только этимъ методикамъ, и вообще эти работы являются почтенными въ русской методической литературѣ.

4) Обзоръ русскихъ и иностранныхъ методикъ ариѳметики не полонъ и не характеренъ. Такъ, напр., не были указаны такіе солидные работы, какъ методики гг. Бобровникова и Гурьева.

Кромѣ того, г. Волковскій указалъ на особенности методическихъ взглядовъ гг. Галанина, Герлаха, Лая и Штеклина и затѣмъ высказалъ слѣдующія положенія, примыкающія къ вопросу о методикѣ ариѳметики.

1) Слѣдуетъ осторожно и критически относиться къ дан-

нымъ экспериментальной психологіи и дидактики, ибо въ нихъ не мало спорнаго по вопросу, касающемся ариѳметики.

2) Не слѣдуетъ увлекаться рисованіемъ на урокахъ ариѳметики, какъ это теперь перѣдко дѣлается въ Россіи съ легкой руки американцевъ.

3) Признавая полезность и необходимость жизненныхъ практическихъ задачъ, а также задачъ, содержаніе которыхъ черпается изъ другихъ учебныхъ предметовъ, какъ, напр., географія, исторія, естественныя науки, приходится предостеречь отъ увлеченія этимъ.

4) Обобщая направленія въ области иностранныхъ методикъ ариѳметики, г. Волковскій замѣтилъ, что изъ иностранцевъ больше всѣхъ разрабатываютъ методику ариѳметики нѣмцы и американцы, но работы нѣмцевъ слишкомъ систематичны и перѣдко педагогичны, а работы американцевъ слишкомъ практичны.

10) Русскіе методисты должны пойти среднимъ путемъ: должны планомерно и цѣлесообразно соединить систематичность съ практичностью, теоретичность съ жизненностью, избѣгая односторонностей, ибо какъ излишняя теоретичность, такъ и излишняя практичность въ равной мѣрѣ не совмѣстимы со здравымъ обученіемъ вообще и ариѳметикой въ частности.

Въ заключеніе высказанныхъ имъ замѣчаній, г. Волковскій призываетъ русскихъ методистовъ къ совмѣстной и дружной работѣ въ этомъ направленіи.

В. Р. Мфронекъ (Спб.). „Прежде, чѣмъ возражать моему оппоненту по существу, я долженъ напомнить, что въ докладѣ я ограничилъ разсмотрѣніе методической литературы по ариѳметикѣ только книгами, изданными на русскомъ языкѣ. Поэтому ясно, что я не могъ вдаваться въ обзоръ иностранной методической литературы“.

„Персхожу къ отдѣльнымъ пунктамъ. Г. Волковскій утверждаетъ, что предположенная мною классификація несостоятельна, невѣрна и не характерна; для доказательства онъ ссылается на Евтушевскаго и Гольденберга, которыхъ я отнесъ къ одному направленію, тогда какъ между ихъ взглядами будто-бы громадная разница. Очень жаль, что оппонентъ не указалъ деталей этой разницы. Ни для кого не секретъ, что споръ между Евтушевскимъ и Гольденбергомъ велся изъ за вопроса о числѣ; ни тотъ, ни другой не являлись сколько нибудь самостоятельными творцами, а лишь болѣе или менѣе умѣло добавляли крупинцы своего опыта къ такимъ же крупинцамъ предшественниковъ и современниковъ. И при томъ, развѣ по существу методъ доказательства у Евтушевскаго и Гольденберга различенъ?“

Оба опираются на личный опыт, оба стараются этотъ эмпиризмъ возвести въ догму. Развѣ кто-либо изъ нихъ — или изъ всѣхъ остальныхъ, указавшихъ мною эмпириковъ — хотя бы пытался призвать на помощь теорію познанія, психологію, исторію математики? Развѣ они могли—при всемъ желаніи—сдѣлать это, если научная ариѳметика и научная методика зародилась послѣ нихъ? И развѣ при такомъ заколдованномъ кругѣ всѣ новыя „Методики“ не будутъ неизбежно перекраиваться изъ старыхъ? Дали у каждаго на 5%—10% могутъ расходиться; да развѣ въ этомъ дѣло? Духъ книги, узость и замкнутость педагогическаго и математическаго міросозерцанія—вотъ что вѣсть со страницъ всѣхъ этихъ «Методикъ» и это заставляетъ отнести ихъ къ одному направленію».

„Я согласенъ, что не указалъ старыхъ методикъ (начала XIX ст.); но вѣдь я читалъ докладъ не по исторіи преподаванія ариѳметики!“

„Я не буду вдаваться въ филологію и выяснять сущность и различіе терминовъ эмпирической и экспериментальной. Г. Волковскій, вѣроятно, знаетъ, что наука была эмпирической, затѣмъ стала догматической, а потомъ — экспериментальной. Вотъ такая же точно эволюція происходитъ и съ педагогикой. Во всякомъ случаѣ, смѣшивать эти два направленія нѣтъ никакихъ основаній“.

„Затѣмъ г Волковскій перешелъ къ установленію собственныхъ взглядовъ на методику ариѳметики. Въ первую очередь онъ отпелся критически къ Лаю и вообще къ экспериментально-педагогическому направленію. Я былъ изумленъ его словами: вѣдь онъ такъ недавно рекомендовалъ русской публикѣ книгу Лая и даже редактировалъ ся переводъ? Правда, что съ тѣхъ поръ прошло 2 года и теперь подъ его же редакціей выходитъ методика Штеклина. Но развѣ Штеклинъ можетъ быть принять въ серьезъ и противопоставленъ Лаю? На стр. 10—13 онъ осмѣиваетъ и критикуетъ «изобрѣтателя квадратныхъ числовыхъ фигуръ» (т. е Лая), а, слѣдовательно, и самыя фигуры, но дальше (стр. 152, 154—156 и др.) онъ не только заявляетъ, «что и горизонтальный, и вертикальный рядъ, составленный изъ 10 одинаковыхъ точекъ (свѣтлыхъ или темныхъ), страдаетъ полнымъ отсутствіемъ наглядности», но и указываетъ, какъ должны ученики рисовать числовыя фигуры на грифельныхъ доскахъ, совѣтуетъ дать имъ въ руки индивидуальное наглядное пособіе въ видѣ числовыхъ фигуръ, «составленныхъ изъ точекъ», и, наконецъ, прямо утверждаетъ, «что тотъ, кто прибѣгаетъ къ счету, никогда не научится порядочно вычислять». Справедливо-ли послѣ этого противополгать

подобнаго методиста Лаю? И вообще—можно ли серьезно утверждать, что опыты Вальземана, Киниллинга и др. противорѣчатъ даннымъ Лая?»

„Но г. Волковскій этимъ не ограничился. Онъ заявилъ, что въ психологіи есть 2 школы, что въ Петербургѣ есть Нечаевъ, но зато въ Москвѣ есть Челпановъ. Я приведу только одну справку. На II Всероссийскомъ Сѣздѣ по Педагогической Психологіи (1909 г.), а затѣмъ въ «Вопросахъ Философіи и Психологіи» Челпановъ утверждалъ, что психологія одна и никакой экспериментальной психологіи нѣтъ. Но въ то время, какъ въ Петербургѣ съ кафедръ Челпановъ громилъ экспериментъ, какъ хламъ, въ Москвѣ, въ магазинѣ Карбасникова, продавался его литографированный «Курсъ экспериментальной психологіи», читанный студентамъ Московскаго Университета...“

„Въ заключеніе г. Волковскій рекомендовалъ сугубую осторожность во взглядахъ, поэтому—совѣтовалъ не увлекаться рисованіемъ, жизненными задачами, излишней практичностью и т. п. Все это—человѣчество слышало сотни разъ; но какъ все это скучно! Напротивъ—не надо бояться новаго, широкаго и разносторонняго! Отбросимъ старые рецситы нашихъ «Методикъ», сблизимъ учителя съ ученикомъ, а ихъ обоихъ—съ жизнью, дадимъ имъ возможность принаравливаться къ условіямъ мѣста, времени, среды. Довольно съ насъ старыхъ задачниковъ для Сибири и Москвы, Архангельска и Кавказа. Нужны районные задачки, тѣсно связанные съ кругомъ представленій учащихъ, съ ихъ индивидуальнымъ и біологическимъ интересами. Намъ нужна не совмѣстная осторожная нивелировка методистовъ, а творческая, свободная дѣятельность учителя“.

М. Г. Попруженко (Спб). „Резумируя пренія по поводу докладовъ о методикахъ ариметики, я съ сожалѣніемъ долженъ отмѣтить излишнюю страстность, внесенную въ обсужденіе, и неполную обоснованность нѣкоторыхъ выводовъ“.

„Такъ, напримѣръ, классификація методикъ, сдѣланная г. Мрочскомъ, вызываетъ разнообразныя сомнѣнія по поводу психологическихъ началъ, положенныхъ въ основу ея, и во всякомъ случаѣ изъ нея не вытекаетъ заключеніе, что новѣйшія методики «научнѣе», являются наилучшими, заслоняющими собой всѣ предшествующія. И въ прежнихъ методикахъ есть глубокія психологическія наблюденія опытныхъ педагоговъ и ищущій преподаватель можетъ найти въ нихъ очень цѣнныя для него указанія“.

Пренія по докладу Н. Н. Володкевича.

(См. стр. 94).

Л. А. Семскін (Варшава) дѣлаетъ сообщеніе о своей попыткѣ составить задачникъ по ариѳметикѣ примѣнительно къ жизни. Всѣ задачи въ задачникѣ составлены имъ для его уроковъ въ гимназіи и всѣ рѣшались въ классѣ. Во всѣхъ задачахъ операціи производятся не надъ числами, не имѣющими никакого жизненнаго смысла, а надъ вполне опредѣленными величинами, взятыми изъ географіи, исторіи, естественныхъ наукъ и т. п. При этомъ всѣ числа вполне отвѣчаютъ дѣйствительности, но въ нѣкоторыхъ задачахъ числа округлены. Во многихъ мѣстахъ дается понятіе о среднихъ величинахъ и о нѣкоторыхъ приближенныхъ дѣйствіяхъ. Матеріалъ для задачъ взятъ, по большей части, изъ данныхъ для Россіи, только иногда для сравненія берутся данные другихъ государствъ. Такъ, напр., для сложенія берутся число жителей въ городахъ, губерніяхъ, ихъ пространства, разстоянія между городами, длины рѣкъ съ притоками и т. п. Въ задачахъ съ историческимъ элементомъ ученики оперируютъ надъ промежутками времени между моментами различныхъ событій, находятъ моментъ нѣ котораго событія, когда извѣстенъ моментъ другого событія и промежутокъ времени между этими моментами. Во многія задачи включены свѣдѣнія изъ статистики Россіи и другихъ государствъ. Есть задачи, гдѣ фигурируетъ бюджетъ. Задачи о курьерахъ замѣнены соответственными задачами изъ жизни: встрѣча пароходовъ, поѣздовъ. Въ задачахъ на бассейны можетъ быть взята для примѣра Нарзанъ. Пользуясь задачами на приходъ и расходъ, капиталъ и долгъ, время до и послѣ событія, температура и т. д., можно и въ I-мъ классѣ дать понятіе объ отрицательныхъ числахъ.

Д. Л. Волковскій (Москва). „Вопросъ о содержаніи задачъ очень важенъ и не новъ. Нельзя увлекаться этимъ. Необходимо всегда при рѣшеніи задачи выяснить ея смыслъ, а это можно дѣлать только послѣ того, какъ предметъ задачи ужъ извѣстенъ изъ пройденнаго курса (по другимъ предметамъ), но въ I классѣ многіе предметы, свѣдѣніями изъ которыхъ г. Сельскій предлагаетъ пользоваться, не проходятся и поэтому придется на урокахъ ариѳметики проходить и исторію, и географію, и другіе предметы. Это можетъ отвлечь вниманіе учениковъ отъ основной цѣли урока“.

В. М. Куперштейнъ (Елисаветградъ) указываетъ, что нельзя въ первомъ классѣ рѣшать, напр., такіа задачи, гдѣ встрѣчается

бюджетъ Россіи. Это приведетъ къ необходимости обширныхъ объясненій въ этой области и не всегда это будетъ понятно ученикамъ. Затѣмъ необходимо различать задачки для дѣтей городскихъ и для дѣтей деревенскихъ. У нихъ совершенно разный кругъ представленій, и поэтому задачки однихъ не годятся для другихъ. Всѣ наши задачки для начальнаго обученія составлены для сельской школы, а потому являются непригодными для городскихъ дѣтей.

Н. П. Володковичъ (Кіевъ) предлагаетъ Слѣзду высказаться о желательности составленія задачника, отвѣчающаго жизненнымъ условіямъ, и указываетъ на способъ коллективнаго составленія такого задачника. Каждый преподаватель могъ бы прислать куда-либо въ опредѣленное мѣсто составленные имъ задачи и по накопленіи матеріала могла бы быть произведена коллективная же разработка этого матеріала.

М. Г. Попруженко (Спб.) высказываетъ опасеніе, какъ бы требованія жизненности и практичности содержанія задачъ не отодвинули на задній планъ тѣ требованія, которымъ должны удовлетворять задачки, имѣя въ виду главную цѣль — обученіе ариметикѣ, какъ бы составители задачниковъ не стали бы главнымъ образомъ заботиться о томъ, чтобы заполнить свои сборники возможно болѣе разнообразными свѣдѣніями изъ исторіи, географіи, статистики и т. п.

Что касается задачника г. Сельскаго, то *М. Г. Попруженко* указываетъ на полную непрактичность нѣкоторыхъ изъ помѣщеныхъ въ этомъ сборникѣ задачъ.

Предсѣдатель секціи, *М. Г. Попруженко*, докладываетъ, что, согласно выраженному въ засѣданіи 28-го Января желанію членовъ секціи Организационный Комитетъ включаетъ въ число резолюцій и резолюцію о желательности изданія математической хрестоматіи.

2-я секція.

Програмы и экзамены.

Во второй секціи обсуждались вопросы о *проформахъ математики въ средней школѣ и объ экзаменахъ*. Докладамъ перваго рода было посвящено 1-ое засѣданіе, происходившее 27 декабря, докладамъ второго рода—2-ое засѣданіе, происходившее 30 декабря.

Во *первомъ засѣданіи* были заслушаны доклады:

1) *Н. А. Таммишев* (Сиб.). «О реформѣ преподаванія математики. Общія положенія и программы».

2) *Г. П. Кузнецов* (Новочеркасскъ). «О желательности временныхъ измѣненій въ преподаваніи алгебры въ женскихъ учебныхъ заведеніяхъ».

Во *второмъ засѣданіи* были заслушаны доклады:

3) проф. *П. А. Некрасов* (Сиб.). «О результатахъ преподаванія анализа бесконечно-малыхъ и аналитической геометріи въ реальныхъ училищахъ».

4) *В. А. Маркович* (Сиб.). «Объ экзаменахъ по математикѣ въ средней школѣ».

За каждымъ докладомъ сейчасъ же слѣдовали пренія, отличавшіяся сравнительною оживленностью; особенно много обсуждался докладъ Г. П. Кузнецова.

Засѣданія второй секціи происходили подъ предсѣдательствомъ проф. Михайловской Артиллерійской Академіи ген.-майора С. Г. Петровича при секретарѣ П. А. Самохваловѣ.

I. О реформѣ преподаванія математики. Общія положенія и программы. Содержаніе курса математики за первыя шесть лѣтъ обученія.

Докладъ П. А. Тамашиевой (Сиб.).

«Абсолютное познаніе математики, полное отсутствіе какихъ бы то ни было математическихъ понятій и представленій, незнакомство съ основными методами математическаго изслѣдованія, пренебрежительное, но вѣстѣ съ тѣмъ не лишнее страхи отношеніе къ математикѣ, — все это является у насъ обычнымъ и даже считается вполнѣ естественнымъ. Но есть ли это неопровержимое доказательство полной непродуктивности принятыхъ у насъ методовъ преподаванія и нецѣлесообразности выбора и распределенія матеріала, составляющаго курсъ математики нашихъ школъ? Въ оправданіе говорить, что математика далека отъ жизни. Дѣйствительно, далеки отъ жизни математическія теоріи, научныя разработки математическихъ вопросовъ, но развѣ далеки отъ жизни математическія понятія и представленія? Развѣ намъ не приходится постоянно сталкиваться съ понятіями о рядѣ, бесконечности, непрерывности и функциональной зависимости, а также съ пространственными и временными соотношеніями; развѣ внѣшній міръ не даетъ безконечнаго многообразія геометрическихъ формъ, развѣ мы не сталкиваемся со всякаго рода измѣреніями, извѣщиваніями, съ опредѣленіями объемовъ, площадей, съ различными видами движенія, съ примѣненіями математическихъ методовъ къ изученію явленій природы, съ географическими и астрономическими понятіями о формѣ земли, небесныхъ тѣлъ, ихъ орбитѣ; развѣ не опредѣляемъ положенія точки, предмета при помощи координатъ, не пользуемся графиками и т. д. и т. д. И развѣ

все это далеко отъ жизни? А именно эти понятія и представленія и должны быть даны на первыхъ ступеняхъ обученія. И только тогда, когда они будутъ усвоены, когда они сдѣлаются полнымъ достояніемъ учениковъ, можно приступить къ изученію математики, къ ознакомленію съ ея методами и законами, словомъ, къ приобрѣтенію знаній. А у насъ начинаютъ съ того, что даютъ обрывки знаній, которые приобрѣтаются болѣею частью на память и, не имѣя за собой правды, понятій и представленій, остаются разрозненными, не находятъ себѣ примѣненій и скоро забываются. Такое преподаваніе, конечно, не только не даетъ знаній, но и не способствуетъ выработкѣ математическихъ сужденій и опредѣленій, не пробуждаетъ ума, не приучаетъ къ наблюдательности, не развиваетъ самостоятельности и изобрѣтательности.

Цѣлью великаго обученія должно быть полное всестороннее развитіе всѣхъ способностей и творческихъ силъ человека. Этому должны способствовать весь учебный матеріалъ: каждая отрасль науки должна будетъ развивать тѣ способности, тѣ стороны души человека, которыя ближе методамъ и цѣлямъ данной науки. Математика приучаетъ къ обобщенію, къ абстракціи, къ синтезу, вмѣстѣ съ тѣмъ она учитъ наблюденію, дифференціаціи признаковъ и строгому всестороннему анализу. Она способствуетъ выработкѣ точнаго и краткаго языка, яснаго опредѣленія мысли и учитъ употребленію символовъ для выраженія идей, установленію связи между абсолютнымъ и относительнымъ, конкретнымъ и абстрактнымъ. Но для достиженія намѣченныхъ цѣлей математика не должна преподноситься въ видѣ ряда отдѣльныхъ положеній, истинъ и теоремъ, ничѣмъ не связанныхъ между собой, принимаемыхъ зачастую на вѣру, не намѣчающихъ путей къ послѣдующимъ изслѣдованіямъ.

Курсъ математики долженъ представлять изъ себя органическое цѣлое. Всѣ отдѣлы слѣдуетъ тѣсно взять между собой и, когда возможно, иллюстрировать. Черезъ весь курсъ должна ярко проходить идея о функціональной зависимости и о выраженіи всякой зависимости въ видѣ уравненія. Тогда начальный курсъ математики будетъ тѣсно связанъ съ изученіемъ математики, какъ науки.

Гдѣ возможно, должна быть установлена тѣсная связь между анализомъ и геометрией. Пространственные представленія должны быть даны и восприняты возможно ярче и опредѣленнѣе. Этому будутъ способствовать учение о координатахъ и теорія проэкцій. Въ геометрію должно быть введено понятіе движенія, и статическое изученіе явленій должно быть замѣнено динамическимъ.

При разсмотрѣніи каждаго отдѣльнаго вопроса, надо указать на его мѣсто среди другихъ вопросовъ, на его конечную цѣль и назначеніе. Необходимо подчеркнуть, что нѣкоторые положенія принимаются безъ доказательствъ, служатъ постулатами, аксіомами, познакомить съ тѣмъ, что называется гипотезами, сообщить тѣ изъ нихъ, которыя доступны, указать, насколько возможно, на вопросы, намѣченные для рѣшенія въ будущемъ.

Тогда станутъ яснѣе цѣли и задачи науки, откроются ея горизонты, и изученіе ея приобрететъ цѣльность и интересъ. Надо познакомить съ исторіей математики, указывая на ея этапы и на естественный путь ея развитія. Должны быть приведены также примѣненія различныхъ отдѣловъ математики къ изученію явленій природы, къ естественнымъ наукамъ и различнымъ отраслямъ техники. Не слѣдуетъ обособлять математику отъ другихъ наукъ, а напротивъ, указать на ея мѣсто среди нихъ, на ея значеніе для физики, химіи, механики, астрономіи и т. д.

И буду говорить о преподаваніи математики въ первые шесть лѣтъ обученія, т. е. въ тотъ періодъ, за который долженъ быть пройденъ весь подготовительный курсъ. За этотъ періодъ дѣти должны воспринять всѣ основныя математическія представленія и понятія и получить достаточную подготовку, чтобы приступить къ систематическому изученію математики, какъ науки.

Прежде всего скажу, что на этой ступени обученія математика должна быть, насколько это возможно, сближена съ жизнью. Вѣдь сама жизнь съ ея нуждами, наблюденіе и изученіе явленій окружающаго міра, необходимость, а не абстрактныя соображенія породили математику. А преподаваніе должно

вестись именно такъ, чтобъ дѣти шли по естественному пути развитія науки, знакомились съ тѣмъ, что вызвало зарожде-
 ние той или иной науки, того или иного ея отдѣла. Надо
 предлагать дѣтямъ задачи, которыя они должны выполнять
 сами и при рѣшеніи которыхъ они будутъ наталкиваться на
 необходимость знаній того или иного отдѣла математики.
 Тогда цѣль и назначеніе этого отдѣла, этого знанія будутъ
 ясны и опредѣленны.

Надо, чтобы преподаваніе было перенесено изъ классовъ
 въ лабораторіи, чтобъ ученики перестали повторять за учите-
 лемъ далекія, ненужныя, а подчасъ и непонятныя имъ истины,
 а чтобъ они сами доискивались этихъ истинъ, сами замѣчали
 и открывали основныя свойства явленій, сами находили опре-
 дѣленные математическіе законы и соотношенія, чтобъ все
 новое было плодомъ ихъ творческой работы, какъ бы ихъ
 маленькимъ открытіемъ.

Вотъ приблизительное содержаніе того курса, который я
 считаю возможнымъ пройти за первыя шесть лѣтъ обученія.

Содержаніе курса математики первыхъ шести лѣтъ обученія.

1-ый годъ.

Установленіе понятій — одинъ, много, мало, ничего, нѣ-
 сколько, больше, меньше — при помощи наглядныхъ пособій.

Счисленіе. Изученіе чиселъ 1 — 10. Наглядныя пособія.
 Четыре дѣйствія надъ числами перваго десятка.

Установленіе понятій — длина, ширина, высота, глубина,
 вѣсъ, скорость, сила, температура, время и т. п. — при помощи
 самостоятельныхъ работъ въ лабораторіяхъ.

Счисленіе отъ 10—20. Четыре дѣйствія въ предѣлахъ
 10—20.

Первоначальныя понятія о доляхъ и дробяхъ.

Знакомство съ геометрическими тѣлами, фигурами и ли-
 ніями. Кубъ, брусъ, пирамида. Цилиндръ, конусъ, шаръ. Че-
 тыреугольникъ, треугольникъ, кругъ. Горизонтальныя и вер-
 тикальныя линіи. Уровень и отвѣсъ. Прямыя, ломаныя и кривыя
 линіи. Острые, тупые и прямые углы.

2-ой годъ.

Счисленіе отъ 1—100. Четыре дѣйствія надъ числами первой сотни. Введеніе знаковъ.

Увеличеніе и уменьшеніе дробей; выраженіе однихъ долей въ другихъ; сравненіе дробей.

Введеніе буквенныхъ обозначеній.

Первыя попытки составленія формулъ и уравненій при рѣшеніи задачъ.

Самостоятельныя измѣренія и вѣзѣннанія. Знакомство съ мѣрами длины, вѣса и времени. Планы и масштабы.

Первыя геометрическія понятія о тѣлахъ, фигурахъ, плоскостяхъ, углахъ, линіяхъ. Многогранники.

Многоугольники. Различныя виды четырехугольниковъ и треугольниковъ. Круглыя тѣла и ихъ части.

Кругъ, окружность, діаметръ, радіусъ.

Параллельныя и перпендикулярныя линіи. Самостоятельныя изготовленія моделей. Лѣпка, вырѣзываніе изъ картона, черченіе, развертки. Опредѣленіе положенія точки на горизонтальной и вертикальной прямой. Координаты точки. Опредѣленіе мѣста дерева въ саду, города на картѣ и т. п. Графики. Изображеніе различныхъ величинъ, въ видѣ отрѣзковъ, прямоугольниковъ, секторовъ. Самостоятельныя измѣренія для полученія данныхъ при составленіи графиковъ.

3ій годъ.

Письменное и устное счисленіе отъ 1—1000. Четыре дѣйствія надъ числами первой тысячъ.

Понятіе объ отрицательныхъ числахъ. Установленіе понятія отрицательнаго числа: температура выше и ниже нуля, теченія рѣки и движеніе лодки противъ теченія, долгъ и капиталъ, прошедшее и будущее и т. д. Графическая иллюстрація.

Сокращенія дробей. Выраженіе дробей въ одинаковыхъ доляхъ. Четыре дѣйствія надъ дробями съ небольшими знаменателями.

Мѣры сыпучихъ тѣлъ, жидкости и бумаги. Происхожденіе мѣръ. Проценты, какъ сотая часть. Самостоятельныя измѣренія.

Первоначальныя понятія о степенн. Возвышеніе въ степень. Геометрическій способъ нахожденія квадрата и куба.

Понятіе о функціональной зависимости. Измѣненіе пути со временемъ, количества сгораемаго вещества со временемъ, объема тѣла съ температурой и т. д. Установленіе этой зависимости при помощи самостоятельныхъ наблюденій и работъ въ лабораторіяхъ. Основныя понятія по физикѣ. Выраженіе всякой зависимости въ видѣ уравненія. Графическое изображеніе функціональной зависимости. Рѣшеніе задачъ при помощи уравненія и при помощи графиковъ.

Понятіе объ объемахъ, поверхностяхъ и площадяхъ.

Самостоятельныя измѣренія. Развертки куба и параллелограмма. Изготовленіе моделей. Наглядные способы опредѣленія объема и поверхности куба и параллелограмма. Площадь квадрата, прямоугольника, треугольника. Аналогія съ возвышеніемъ въ квадратъ и въ кубъ. Квадратныя и кубическія мѣры.

Перемѣщеніе. Траекторія. Поступательное движеніе. Параллельныя линіи. Вращательное движеніе. Перпендикулярныя линіи.

4 ый годъ.

Нумерація. Четыре дѣйствія надъ числами любой величины. Зависимость между факторами дѣйствій и ихъ результатами.

Метрическая система мѣръ.

Понятіе о десятичныхъ числахъ. Десятичные знаки, какъ продолженіе разрядныхъ единицъ вправо отъ разряда единицъ. Увеличеніе и уменьшеніе десятичныхъ чиселъ. Четыре дѣйствія надъ десятичными числами по аналогіи съ четырьмя дѣйствіями надъ цѣлыми числами.

Отрицательныя числа, какъ продолженіе натурального ряда чиселъ влево отъ нуля. Абсолютная величина отрицательныхъ чиселъ. Четыре дѣйствія надъ отрицательными числами. Выясненіе правила знаковъ.

Уравненія съ отрицательными числами.

Второй, третій и четвертый координатные углы. Графики.

Составленіе таблицъ значений функцій. Графическое изображеніе уравненій.

Понятіе о непрерывности и разрывѣ непрерывности. Величины соизмѣримыя и несоизмѣримыя.

Приближенныя вычисленія. Вычисленія съ данной точностью.

Отношенія и пропорціи.

Возвышеніе въ степень. Степени 10^2 , 10^3 , 10^4 ,

Объемъ призмы. Поверхность призмы. Площадь параллелограмма, треугольника. Площади многоугольниковъ. Равенство и равновеликость фигуръ. Пропорціональныя линіи. Подобіе фигуръ. Знакомство съ землеѣрными инструментами. Землеѣрныя работы. Функціональная зависимость между элементами фигуры и ея площадью, элементами тѣла и его объемомъ. Установленіе этой зависимости опытнымъ путемъ. Понятіе о симметріи. Ось симметріи. Симметрія относительно точки, прямой, плоскости. Симметричныя фигуры. Доказательство нѣкоторыхъ теоремъ при помощи симметріи. Понятіе о проэкціи. Проэкція точки, линіи, фигуры и тѣла на горизонтальную и вертикальную оси или плоскости проэкцій.

Изображеніе въ зеркалѣ, въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ зеркалахъ.

Основныя понятія по механикѣ. Сила, скорость, время, пройденный путь и т. д. Различныя виды движенія.

5-ый годъ.

Понятіе о безконечности (натуральный рядъ чиселъ вправо и влѣво отъ нуля; прямая, плоскость и т. д.). Понятіе о безконечно-малыхъ (дроби, знаменателями которыхъ служатъ числа безконечно-большія и т. п.).

Ряды. Сумма первыхъ n нечетныхъ чиселъ $(1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1)$. Сумма первыхъ n четныхъ чиселъ $(2 + 4 + 6 + \dots + 2n)$. Сумма натурального ряда чиселъ $(1 + 2 + \dots + n)$. Сумма квадратовъ $(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$.

Сумма кубовъ ($1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$) и т. д. Опредѣленіе суммъ этихъ рядовъ экспериментальнымъ путемъ.

Арифметическая прогрессія. Наглядный способъ опредѣленія суммы членовъ арифметической прогрессіи. Опредѣленіе послѣдняго члена. Геометрическая прогрессія. Опредѣленіе суммы членовъ геометрической прогрессіи при помощи алгебраическаго дѣленія и нагляднымъ способомъ. Опредѣленіе послѣдняго члена. Графическая иллюстрація прогрессій.

Рѣшеніе системы уравненій съ двумя неизвѣстными. Составленіе уравненій. Графическое изображеніе уравненій.

Наглядные способы опредѣленія объема цилиндра. Площадь круга. Длина окружности. Поверхность цилиндра. Зависимость между радіусомъ и площадью круга. Развертка поверхности цилиндра.

Объемъ пирамиды. Поверхность пирамиды. Построеніе. Развертка. Усѣченная пирамида. Объемъ конуса. Поверхность конуса. Понятіе объ эллипсѣ, гиперболѣ, параболѣ. Ихъ вычерчиваніе. Орбиты свѣтилъ.

Прямоугольныя оси координатъ, разстояніе между двумя точками. Выборъ осей координатъ.

3-ой годъ.

Дроби. Обращеніе десятичныхъ дробей въ простыя и простые въ десятичныя.

Формулы $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$.

Геометрическое и алгебраическое доказательство этихъ формулъ.

Формулы $(a+b)^3$, $(a+b)^4$.

Квадратныя уравненія. Аналитическое и геометрическое рѣшеніе квадратныхъ уравненій. Объемъ шара. Поверхность шара. Географическія понятія: ось земли, меридіанъ, параллели и т. п. Тѣла вращенія. Начальныя понятія по астрономіи. Опредѣленіе высоты свѣтила, діаметра луны и т. д.

Рѣшеніе треугольниковъ. Понятіе о нѣкоторыхъ тригонометрическихъ функціяхъ. Составленіе таблицъ. Понятіе о геодезіи. Простѣйшія задачи.

сомъ тѣла и растяженіемъ пружины въсовъ, атмосфернымъ давленіемъ и показаніями барометра и т. д. Хорошей иллюстраціей функциональной зависимости является зависимость между пройденнымъ путемъ и временемъ, причемъ надо указать, что зависимость эта опредѣляется скоростью. Функциональная зависимость между всѣми этими величинами должна быть установлена, конечно, при помощи самостоятельныхъ работъ въ лабораторіяхъ.

Я предполагаю, что на этой ступени обученія дѣти будутъ проходить пропедевтическіе курсы физики, химіи, механики, астрономіи и будутъ знакомы съ пачатками этихъ наукъ. Учитель математики долженъ быть освѣдомленъ относительно того, что проходитъ на другихъ урокахъ и брать примѣры изъ матеріала, знакомаго ученикамъ. Если же такіе курсы не будутъ проходить, то учитель математики долженъ будетъ самъ познакомить учениковъ съ первоначальными, доступными имъ понятіями изъ области этихъ наукъ и заставить ихъ продѣлать въ лабораторіяхъ нѣкоторые опыты. Пока ученики сами не опредѣляютъ, не устанавливаютъ опытнымъ путемъ этой зависимости, они не будутъ чувствовать и понимать ее.

При прохожденіи курса математики надо, гдѣ только возможно, обращать вниманіе на существованіе и значеніе функциональной зависимости. Такъ при прохожденіи арифметическихъ дѣйствій надо каждый разъ устанавливать зависимость между результатами и факторами дѣйствій; заставить дѣтей увеличить или уменьшить одну изъ данныхъ и потомъ опредѣлить, какое измѣненіе это внесло въ результатъ и какая между ними существуетъ зависимость. Дробы, пропорціи и проценты также могутъ служить для иллюстрированія идеи функциональной зависимости. Геометрія представляетъ особенно богатый матеріалъ въ этомъ отношеніи. Какъ только дѣти познакомятся съ различными тѣлами и фигурами и будутъ сами лѣпить, вырѣзать и склеивать ихъ, надо будетъ обратить вниманіе дѣтей на зависимость между элементами фигуръ и тѣла и ихъ величиной. Можно дать списки различной величины и предложить строить изъ нихъ квадраты и прямоугольники; постепенно дѣти убѣдятся, что чѣмъ больше сторона квадрата

или прямоугольника, тѣмъ больше ихъ периметръ и площадь. Можно также предложить имъ построить или начертить прямоугольникъ съ данными сторонами, потомъ увеличить эти стороны въ 2 раза и на нихъ построить новый прямоугольникъ; изъ чертежа будетъ видно, что полученный прямоугольникъ будетъ равенъ четыремъ первоначальному, т. е. площадь его будетъ въ четыре раза больше, а периметръ въ два раза больше площади и периметра первоначального. Потомъ можно заставить вырѣзать и склеивать кубы различной величины и показать, что объемъ куба зависитъ отъ величины ребра, отъ площади основанія. Можно также заставить дѣлать шары изъ спицъ различной величины и указать на зависимость между радиусомъ шара и его объемомъ и поверхностью. Ограничу съ этими примѣрами.

Послѣ цѣлаго ряда подобныхъ примѣровъ дѣти убѣдятся, что между величинами, съ которыми имъ приходилось имѣть дѣло, существуетъ нѣкоторая зависимость, причемъ зависимость эта иногда можетъ быть выражена вполне опредѣленнымъ образомъ. Такъ, рассматривая зависимость между суммой и слагаемыми, находимъ, что $s = a + b + c + \dots$; между разностью, уменьшаемымъ и вычитаемымъ $d = m - x$, между произведеніемъ и множителемъ $P = Mn$; между частнымъ, дѣлимымъ и дѣлителемъ, $d = \frac{D}{a}$; между площадью прямоугольника, его основаніемъ и высотой $s = bh$, между весомъ, объемомъ и плотностью $p = rd$; между пройденнымъ путемъ, скоростью и временемъ $s = vt$, и т. д. (Съ буквенными обозначеніями дѣти уже знакомы; составляя всѣ эти выраженія, надо будетъ каждый разъ указывать на происхожденіе данныхъ обозначеній; такъ, имѣемъ: путь = скорость \times время, *spatium* = *velocitas* \times *tempus*, $s = vt$.) Всѣ эти выраженія, опредѣляющія зависимость между величинами и дающія возможность, зная нѣкоторыя изъ этихъ величинъ, опредѣлять черезъ нѣхъ другія, называются уравненіями. При такомъ подходѣ къ уравненіямъ легче будетъ выяснитъ въ будущемъ, что уравненіе есть частный видъ функціи.

Для выясненія зависимости между двумя величинами

лучше всего пользоваться графической интерпретаціей и графической записью явленій. Это особенно важно въ тѣхъ случаяхъ, когда зависимость между величинами не можетъ быть выражена уравненіями. Но прежде чѣмъ говорить о графикахъ, скажу нѣсколько словъ о теоріи координатъ.

Понятія о прямоугольныхъ осяхъ координатъ и объ опредѣленіи положенія точки, линіи, фигуры при помощи координатъ должны быть даны возможно раньше. Усвоеніе ихъ не представляетъ особеннаго затрудненія, такъ какъ дѣти сами часто пользуются ими, не отдавая себѣ въ этомъ отчета, для опредѣленія положенія какого-нибудь предмета, напр., шарика въ игрѣ, мячика или стула, мѣсто котораго они хотятъ запомнить, дерева, около котораго имъ хочется играть или собраться и т. п. Они всегда отмѣряютъ шагами, рукой, веревкой разстояніе предмета отъ какихъ-нибудь двухъ приблизительно взаимно-перпендикулярныхъ пересѣкающихся прямыхъ: отъ стѣны комнаты, отъ забора сада и т. п., другими словами, они выбираютъ какія-нибудь оси координатъ и опредѣляютъ абсциссу и ординату данной точки; и обратно, зная абсциссу и ординату, опредѣляютъ они положеніе точки.

Конечно, начинать надо будетъ съ того, чтобы научить дѣтей опредѣлять положеніе точки относительно вертикальной и горизонтальной осей.

Понятіе объ опредѣленіи положенія точки при помощи координатъ можно дать слѣдующимъ образомъ. Предложить дѣтямъ игру, гдѣ бы внутри прямоугольника были какъ-нибудь расположены шарики, напр., маленькій комнатный крокетъ. Въ крокетѣ будутъ шары и ворота. Положимъ, дѣтямъ надо будетъ запомнить, гдѣ стояли ворота или гдѣ лежалъ какой-нибудь шаръ, чтобъ слова положить ихъ на то же мѣсто.

Какъ имъ поступить въ этомъ случаѣ?

Если вы имъ предложите этотъ вопросъ, то можете получить слѣдующій отвѣтъ: надо какъ-нибудь отмѣтить это мѣсто мѣломъ, краской, сдѣлать дырочку и т. п. Съ нашей точки зрѣнія, этотъ отвѣтъ, конечно, совершенно не цѣпенъ.

Если мы получимъ такой отвѣтъ, то можно указать дѣтямъ на неудобство подобнаго разрѣшенія вопроса.

Можетъ быть, нѣкоторые дѣти предложать отмѣрить разстояніе отъ шара до вершины угла, составленнаго сторонами прямого угла, и запомнить его, а потомъ отмѣрить это разстояніе и положить туда шаръ. Тогда надо имъ предоставить это дѣлать. Они отмѣрятъ это разстояніе и возьмутъ шаръ; но когда они захотятъ положить его, то убѣдятся, что такихъ точекъ будетъ много; тутъ можно ихъ заставить отмѣтить нѣсколько такихъ точекъ и указать, что онѣ лежатъ на дугѣ окружности, всѣ точки которой находятся на данномъ разстояніи отъ точки пересѣченія сторонъ прямого угла; что они измѣрили радіусъ и могутъ найти всѣ точки, лежащія на дугѣ данного радіуса, а не одну опредѣленную точку (объ окружности они уже имѣютъ понятіе). Тогда дѣти поймутъ, что не достаточно знать одно разстояніе, что необходимо знать два.

Наконецъ, нѣкоторые, послѣ всего этого, а вѣрнѣе сразу, скажутъ, что надо отмѣрить разстояніе отъ шара до сторонъ прямого угла. Они уже знаютъ, что разстоянія измѣряются по перпендикулярамъ. Дѣти измѣрятъ эти разстоянія, возьмутъ шаръ, но, когда они захотятъ снова положить его, то явится новое затрудненіе: они не будутъ знать, откуда отмѣрять эти разстоянія.

Тогда надо заставить ихъ снова положить шаръ и отъ шара до сторонъ прямого угла натянуть веревки или положить палочки такъ, чтобъ получились прямоугольники. Они увидятъ, что разстоянія отъ вершины прямого угла до точекъ пересѣченія упомянутыхъ перпендикуляровъ со сторонами прямого угла равны разстояніямъ отъ шара до сторонъ прямого угла и что можно измѣрять эти разстоянія отъ точки пересѣченія сторонъ прямого угла по этимъ сторонамъ, т. е. отъ опредѣленной точки по опредѣленнымъ прямымъ, иначе говоря, отъ начала координатъ по осямъ. Зная эти разстоянія, они отмѣрятъ ихъ отъ начала координатъ по осямъ и въ полученныхъ точкахъ возставятъ перпендикуляры; точка ихъ пересѣченія и будетъ искомымъ мѣстомъ шара.

Можно заставить дѣтей найти такимъ образомъ мѣста нѣсколькихъ шаровъ, т. е. положеніе нѣсколькихъ точекъ.

Потомъ надо положить шаръ во 2-ой координатный уголъ. Одной осью будетъ служить та же сторона прямоугольника, а вторую можно получить, продолживъ другую сторону прямоугольника. Какъ опредѣлить положеніе шара относительно осей, дѣти уже знаютъ. Понятіе о 2-омъ координатномъ углѣ надо давать тогда, когда уже пройдены отрицательныя числа и дѣти знаютъ, что отрѣзки прямыхъ считаются положительными въ одну сторону отъ опредѣленной точки и отрицательными въ другую. Тогда они поймутъ, что въ данномъ случаѣ абсцисса будетъ отрицательная. Послѣ этого они должны опредѣлять положеніе шара въ 3-емъ и 4-омъ координатныхъ углахъ.

Можно будетъ также предложить дѣтямъ опредѣлять мѣсто даннаго ученика въ классѣ, дерева въ саду, города на картѣ и т. д., иначе говоря, найти координаты точки. Потомъ можно заставить ихъ сдѣлать обратную задачу, т. е. по даннымъ координатамъ опредѣлить положеніе точки. Можно предложить имъ, напр., посадить дерево на разстояніи трехъ саженей отъ одного забора и двухъ саженей отъ другого и т. н. Дѣти сами должны выбирать оси и начало координатъ.

Когда они освоятся съ опредѣленіемъ положенія точки относительно осей координатъ, надо будетъ заставить ихъ чертить оси координатъ, координаты точки и познакомиться съ терминами.

Когда уже дѣти знаютъ, что такое функциональная зависимость и имѣютъ понятіе объ осяхъ координатъ, можно перейти къ графическому записи явленій. Съ графиками въ видѣ отрѣзковъ, прямоугольниковъ, секторовъ и круговъ, конечно, надо знакомить дѣтей раньше, какъ это мною и указано въ программѣ.

О значеніи графиковъ и такой записи много говорить не приходится; это теперь достаточно признано, и графиками широко пользуются во всѣхъ отрасляхъ науки. Графики имѣютъ для дѣтей еще то громадное значеніе, что развиваютъ наблюдательность и вниманіе, приучаютъ къ систематическому наблюденію явленій, даютъ болѣе яркое и отчетливое представленіе объ этихъ явленіяхъ и наглядно иллюстрируютъ функциональную зависимость.

Материаломъ для графической записи могутъ служить измѣненія температуры, барометрическаго давленія, количества народонаселенія, посѣщаемость уроковъ, глубина рѣкъ, измѣненіе цѣнъ на какіе-нибудь товары, измѣненіе объема газа отъ давленія, удлинненіе металлическаго стержня отъ измѣненія температуры и всѣ тѣ примѣры, которые были разобраны съ дѣтьми для выясненія функціональной зависимости.

Для вычерчиванія графиковъ надо пользоваться разграфленой бумагой, вначалѣ съ большими кѣтками, а потомъ, для вычерчиванія непрерывныхъ графиковъ, миллиметровой бумагой. Дѣти имѣютъ уже понятіе о координатахъ, и потому имъ можно предложить выбрать самимъ какую-нибудь точку на этой бумагѣ за начало координатъ и какія-нибудь двѣ прямыя за оси координатъ.

Потомъ надо произвести съ дѣтьми рядъ наблюденій, напр., надъ удлинненіемъ резинової нити въ зависимости отъ увеличенія вѣса привѣшеннаго къ ней груза или надъ растяженіемъ пружины подъ вліяніемъ измѣненія дѣйствующей на нее силы, и полученные изъ этихъ наблюденій данныя записать.

Для первыхъ примѣровъ числа должны быть небольшія, чтобы каждую кѣтку бумаги можно было считать за единицу. Данныя хорошо записывать въ видѣ двухъ столбцовъ, изъ которыхъ одинъ представляетъ послѣдовательныя измѣненія одной величины, а другой соотвѣтствующія измѣненія другой, зависящей отъ первой, т. е., иначе говоря, составить таблицу значеній функціи.

Надо указать, что значенія одной величины должны быть отложены по одной оси, а значенія другой—по другой. Для того же, чтобы получить общій характеръ явленія, дѣти должны найти точки, соотвѣтствующія обоимъ измѣненіямъ.

Когда будутъ нанесены всѣ данныя, полученные изъ наблюденія, въ видѣ точекъ, надо ихъ соединить. Полученная линія и будетъ изображать наблюдаемое явленіе, будетъ его графической интерпретаціей.

Такимъ образомъ можетъ быть дано дѣтямъ понятіе о томъ, какъ составлять графики по даннымъ числовымъ зна-

ченіямъ. Послѣ этого надо будетъ ихъ научить обратному процессу, т. е. тому, какъ, имѣя графикъ, найти числовыя значенія какой-нибудь его точки. Напр., имѣя графикъ температуры, опредѣлить температуру въ данный день.

Графиками можно пользоваться для опредѣленія нѣкоторыхъ неизвѣстныхъ значеній опредѣляемыхъ величинъ. Напр.: дано количество народонаселенія за нѣкоторые года, найти графикъ, изображающій измѣненія количества народонаселенія и опредѣлить по графику количество народонаселенія въ промежуточные и послѣдующіе года.

Послѣ того, какъ будетъ рѣшено достаточно примѣрों на графикахъ и дѣти будутъ имѣть ясное представленіе о функциональной зависимости, можно будетъ имъ дать понятіе о функціи.

Повымъ тутъ, въ сущности говоря, будетъ только слово функція и ея обозначеніе. Можно будетъ вспомнить примѣры функцій, которые встрѣчались раньше, и заставить записать, что, напр., объемъ тѣла есть функція температуры, пройденный путь — функція скорости, притяженіе между двумя массами — функція разстоянія между ними и т. д.

За недостаткомъ времени не буду подробно говорить о томъ, какъ дать дѣтямъ понятіе о функціи и о графическомъ изображеніи уравненій, скажу только, что, какъ видно изъ всего изложеннаго выше, это не представляетъ особеннаго затрудненія, а, между тѣмъ, имѣетъ громадное значеніе какъ для дальнѣйшаго прохожденія курса, такъ и для того, чтобы сразу ввести дѣтей въ область математики, какъ науки.

Перейду теперь къ геометріи. Прежде всего скажу, что обученіе геометріи должно начинаться одновременно съ обученіемъ счету. Когда даются основныя понятія счета, измѣренія, тогда же должны быть даны основныя понятія формы, величины и положенія. Для этого на первыхъ же ступеняхъ обученія долженъ проходить наглядный пропедевтический курсъ геометріи. «Приученіе дѣтей къ наблюденію простыхъ геометрическихъ формъ и соотношеній между предметами, которые ежедневно попадаютъ на глаза, обученіе ихъ употребленію простыхъ инструментовъ для геометрическихъ построеній и

ознакомленіе ихъ съ разнообразными наглядными способами опредѣленія длины, площади, объема и положенія предметовъ— все это самое естественное и самое могучее средство, какъ для пріученія ихъ къ наблюдательности, такъ и для выработки привычки къ сосредоточенному и продолжительному вниманію».

Геометрія на этой ступени должна быть, насколько это возможно, сблизена съ жизнью. Надо научить дѣтей подмѣчать геометрическія формы въ окружающемъ насъ мірѣ, въ природѣ. Примѣрами могутъ служить поверхность воды въ озерахъ, прудахъ, дуга радуги, конусообразная форма горы, почти вертикальное направленіе растущаго дерева, причемъ можно при помощи отвѣса опредѣлить его уклоненіе отъ вертикальнаго направленія и уголъ, который онъ составляетъ съ горизонтальной и вертикальной линіями и т. и. Такихъ примѣровъ можно подобрать безчисленное множество.

Пространственныя представленія должны даваться дѣтямъ съ самаго начала, одновременно съ плоскостями, и даже предшествовать имъ. Понятіе о тѣлѣ, объемѣ легче дать ребенку, чѣмъ понятіе о фигурѣ, плоскости, линіи. Дѣти все время имѣютъ дѣло съ тѣлами; тѣла производятъ на глазъ болѣе рельефное, выпуклое впечатлѣніе и легче поддаются воспріятію при помощи осязанія.

Каждому ребенку можно показать—да онъ и видѣлъ—шаръ, цилиндръ, конусъ, пирамиду; на этихъ тѣлахъ легко объяснить понятіе объема, поверхности, установить разницу между кривой поверхностью и плоскостью. Поверхность должна разсматриваться, какъ граница, предѣлъ тѣла, линія—какъ граница поверхности, точка—какъ граница линіи. Можно также показать, что линія, плоскость, тѣло получаются отъ движенія точки, линіи, плоскости. Для установленія всѣхъ этихъ понятій надо широко пользоваться всевозможными наглядными пособіями, заставлять дѣтей вырѣзывать, лепить, клеить разныя тѣла, получать ихъ развертки, вычерчивать ихъ и т. д.

Когда дѣти привыкнутъ разсматривать предметы со стороны ихъ формы, можно будетъ приступить къ разсмотрѣнію предметовъ со стороны величины. Для этого надо познакомить дѣтей съ тѣмъ, какъ производить линейныя измѣренія, какъ

опредѣлять площади и объемы фигуръ и тѣлъ. Конечно, я говорю о чисто наглядныхъ способахъ измѣренія. При этомъ, прежде всего, дѣтямъ надо дать понятіе о томъ, что предметы различной формы могутъ имѣть одинаковыя площади и объемы. Для этого можно имъ предложить продѣлать слѣдующее: вырѣзать изъ бумаги или изъ картона какую-нибудь фигуру, напр., прямоугольникъ, разрѣзать ее на части и приложить эти части другъ къ другу въ различныхъ комбинаціяхъ. Полученныя фигуры будутъ имѣть различныя формы, но площади ихъ будутъ равны. Продѣлавъ нѣсколько такихъ опытовъ, дѣти познакомятся съ тѣмъ, что называется равновеликими фигурами.

Для сравненія тѣлъ различныхъ формъ, но одинаковыхъ объемовъ, можно взять сосуды различныхъ формъ и одинаковыхъ объемовъ и предложить дѣтямъ всыпать въ нихъ одинаковое количество песка, или вливать одно и то же количество воды; можно также взять какое-нибудь тѣло, разрѣзать его на части и сложить ихъ въ различныхъ комбинаціяхъ, или взять столбикъ какихъ-нибудь кружковъ и сдвинуть нѣкоторые изъ нихъ и т. п.

Послѣ этого можно перейти къ опредѣленію площадей и объемовъ. Наглядныхъ способовъ для ихъ опредѣленія существуетъ множество.

Перейду теперь къ вопросу о симметріи.

Ученіе о симметріи обыкновенно отсутствуетъ въ нашихъ курсахъ, а между тѣмъ, оно имѣетъ громадное значеніе, такъ какъ способствуетъ большей ясности плоскостныхъ и пространственныхъ представленій и такъ какъ на основаніи симметріи могутъ быть доказательства гораздо проще, нагляднѣе и рельефнѣе многія теоремы.

Введеніе понятія о симметріи не представляетъ затрудненія даже на первой ступени обученія, такъ какъ симметрія очень распространена въ природѣ, наблюдается почти во всѣхъ окружающихъ предметахъ и съ ней очень свыкъ нашъ глазъ. Симметричны всѣ животныя, почти всѣ цвѣты, листья, человекъ, большая часть зданій, столы, стулья, почти всѣ орнаменты, нѣкоторыя буквы и т. д.

Должно быть дано понятіе о симметріи относительно прямой, плоскости и точки.

Для выясненія понятія о симметріи относительно прямой можно поступить слѣдующимъ образомъ: взять листъ бумаги, сложить его вдвое и на одной изъ сторонъ нарисовать чернилами какую-нибудь фигуру; потомъ, пока чернила еще не высохли, сложить опять этотъ листъ, какъ въ первый разъ. На другой части листа получится изображеніе, симметричное первому относительно линіи сгиба листа, т. е. относительно прямой.

Примѣромъ симметріи относительно плоскости можетъ служить изображеніе предмета въ плоскомъ зеркалѣ. Это изображеніе будетъ сходно съ предметомъ, но не тождественно ему. Такъ, напр., правая рука дастъ въ зеркалѣ лѣвую, перчатка съ одной руки дастъ со своимъ изображеніемъ въ зеркалѣ пару и т. д.

Примѣрами симметріи относительно точки, т. е. центральной симметріи, могутъ служить: кругъ, эллипсъ, правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ.

Надо познакомить дѣтей съ вертикальной и горизонтальной симметріей, съ нѣкоторыми свойствами симметричныхъ фигуръ и теоремами, доказываемыми при помощи симметріи. Напр.: 1) если двѣ точки симметричны относительно какой-нибудь прямой, то эта прямая перпендикулярна къ прямой, соединяющей эти двѣ точки въ ея серединѣ; 2) осью симметріи угла является его биссектриса; 3) въ равнобедренномъ треугольникѣ высота, медиана и биссектриса относительно одной и той же вершины совпадаютъ и служатъ осью симметріи; 4) осью симметріи круга служитъ діаметръ.

Приведу доказательства послѣднихъ двухъ теоремъ.

3) Имѣемъ равнобедренный треугольникъ ABC ; $AB=AC$; AD биссектриса угла A . Если повернуть $\triangle ADB$ вокругъ AD , то AB совпадетъ съ AC , вслѣдствіе равенства угловъ DAB и DAC , точка B совпадетъ съ точкой C , такъ какъ $AB=AC$. Отсюда имѣемъ, что C симметрично съ B относительно AD . Слѣдовательно, AD , перпендикуляръ къ BC въ ея серединѣ, и есть высота и медиана треугольника.

4) Пусть A_1 симметрично съ A относительно оси BC ; $OA_1 = OA$. Если одна изъ этихъ прямыхъ служить радіусомъ, т. е. одна изъ этихъ точекъ лежитъ на окружности, то и другая принадлежитъ окружности. Значитъ, діаметръ служить осью симметріи окружности.

Ограничусь этими примѣрами и перейду къ слѣдующему вопросу.

Въ геометрію по возможности долженъ вводиться элементъ движенія. Статическое изученіе явленій должно уступить мѣсто динамическому. Такъ, понятіе о параллельности должно быть связано съ поступательнымъ движеніемъ; перпендикулярныя линіи и плоскости могутъ быть рассмотрѣны съ точки зрѣнія вращательнаго движенія; равенство фигуръ можетъ быть доказано при помощи ихъ переноса.

Прежде всего надо дать дѣтямъ понятіе о перемѣщеніи, какъ о такомъ измѣненіи положенія тѣла, при которомъ не мѣняется ни его форма, ни его величина. Потомъ познакомить ихъ съ самыми простыми видами движенія: поступательнымъ и вращательнымъ.

Для выясненія понятія поступательнаго движенія можно пользоваться треугольникомъ и линейкой. Скольженіе треугольника по линейкѣ и есть поступательное движеніе. Линейка является неподвижной плоскостью, а треугольникъ движущейся плоскостью. Примѣрами могутъ также служить: листъ бумаги, который мы вкладываемъ въ конвертъ, или ящикъ, который выдвигается или задвигается.

Покажу теперь, какъ вывести понятіе о параллельности при помощи поступательнаго движенія. Прежде всего надо, чтобы дѣти сами путемъ измѣренія убѣдились, что при поступательномъ движеніи всѣ точки движущагося тѣла проходятъ одинаковыя разстоянія. Для полученія параллельныхъ линій нужно заставить скользить треугольникъ вдоль линейки и отчерчивать карандашемъ одну сторону треугольника; всѣ точки полученныхъ линій будутъ отстоять другъ отъ друга на равныхъ разстояніяхъ, т. е. эти линіи будутъ параллельны другъ другу.

Понятіе о параллельныхъ плоскостяхъ можетъ быть вы-

яснено слѣдующимъ образомъ: возьмемъ книгу, положимъ ее на край выдвинутого ящика такъ, чтобы она заняла наклонное положеніе по отношенію къ ящику, и будемъ задвигать ящикъ. Книга будетъ совершать поступательное движеніе. Всѣ точки ея при этомъ будутъ проходить равныя разстоянія, и послѣдовательныя положенія, занимаемыя переплетомъ книги, будутъ параллельны другъ другу.

Программный характеръ темы моего доклада не позволяетъ мнѣ останавливаться дольше на разработкѣ каждаго отдѣльнаго вопроса.

Сейчасъ истекаетъ время, данное мнѣ для доклада, и потому мнѣ не удастся поговорить о задачахъ. Скажу только, что матеріалъ задачъ долженъ быть по возможности разнообразный, жизненный и интересный, данныя должны быть взяты, напр., изъ физики, механики, астрономіи, геодезіи, исторіи, біологіи, географіи и т. д.; конечно, нужно брать самыя простыя соотношенія. Для составленія задачъ надо пользоваться результатами, полученными самими дѣтьми при измѣреніяхъ и изъ опытовъ при работахъ въ лабораторіяхъ. Должны быть совершенно исключены искусственные способы рѣшенія задачъ, ихъ должны замѣнить уравненія и графики, которые значительно облегчатъ какъ пониманіе, такъ и рѣшеніе задачъ.

Я думаю, что прохожденіе курса математики въ младшихъ классахъ по предлагаемой мною программѣ дастъ возможность ввести въ старшіе классы основы такъ называемой высшей математики, и этого настоятельно требуетъ сама жизнь. Наука идетъ впередъ и съ каждымъ годомъ становится сложнѣе, техника развивается съ неслыханной быстротой, математическіе выводы и законы находятъ себѣ все болѣе широкое примѣненіе, жизнь предъявляетъ къ человѣку все большія и большія требованія, а мы продолжаемъ учить дѣтей въ средней школѣ тому, чему ихъ учили много лѣтъ тому назадъ».

Т е з и с ы .

1. Математика не такъ далека отъ жизни, какъ это кажется.

2. Курсъ математики долженъ быть составленъ такъ, чтобы ученики чувствовали въ немъ органическое цѣлое.

3. Черезъ весь курсъ должна ярко проходить идея о функціональной зависимости и о выраженіи всякой зависимости въ видѣ уравненія.

4. Для выясненія зависимости между двумя величинами должны быть введены графики и графическія интерпретаціи.

5. По мѣрѣ возможности должна быть установлена тѣсная связь между анализомъ и геометрией.

6. Пространственныя представленія должны быть даны и восприняты возможно ярче и опредѣленнѣе. Для этого должны быть введены въ курсъ основы аналитической геометріи и теоріи прожекцій.

7. Въ геометрію должно быть введено понятіе движенія. Статистическое изученіе явленій должно быть замѣнено динамическимъ.

8. Къ приобрѣтенію знанія можно приступить только тогда, когда уже усвоены основныя математическія понятія и представленія.

9. Основныя математическія представленія и понятія должны быть установлены при помощи самостоятельныхъ работъ въ лабораторіяхъ.

10. Математическіе законы и соотношенія должны выводиться самими учениками, быть плодомъ ихъ творческой работы, какъ бы ихъ собственнымъ открытіемъ.

11. Между математикой и другими науками должна быть установлена тѣсная связь.

Пренія по докладу Н. А. Тамашевой.

Н. А. Извольскій (Москва). „Вопросъ о выполнимости намѣченной въ шесть лѣтъ программы вызываетъ сомнѣнія. Нельзя такъ просто относиться къ тѣмъ упражненіямъ, которыя необходимы для усвоенія матеріала. Примѣромъ служатъ упражненія на усвоеніе понятій: „столько же“, „больше“, „меньше“. Практика показываетъ, что организовать такія упражненія (безъ введенія чиселъ) для цѣлаго класса крайне затруднительно, но, повидимому, они легко и съ пользой могутъ быть примѣнены къ обученію отдѣльных дѣтей. Кромѣ того, ошибкою является то построеніе „малаго“ курса геометріи, которое начинается съ разсмотрѣнія искусственныхъ тѣлъ, (куба, призмы и т. п.). Слишкомъ много основныхъ геометрическихъ образовъ надо усвоить для усвоенія понятія о кубѣ (или его модели). Нѣтъ, этотъ „малый“ курсъ долженъ базироваться на иныхъ основаніяхъ, и первымъ изъ нихъ является сознаніе: „я умѣю построить прямую линію“.

К. И. Соколовскій (Маріинскъ, Томск. г.). „Докладчица говорила о томъ, что преподаваніе математики въ теченіе первыхъ шести лѣтъ должно имѣть связь съ жизнью, а между тѣмъ по программѣ, предложенной ею, на третій годъ проходитъ счисленіе лишь въ предѣлѣ тысячи, тогда какъ въ жизни часто дѣтямъ приходится встрѣчаться съ числами значительно большими. Что касается ознакомленія съ координатами, функціями и т. п., то, конечно, это хорошо, и будетъ ли это сдѣлано въ шесть или семь лѣтъ, это безразлично.—Возражаю только противъ того, что преподаватели математики должны знакомить учащихся съ основами другихъ наукъ, если преподаватели соответствующихъ предметовъ не успѣютъ этого сдѣлать. Преподаватель математики, задавшись цѣлью знакомить учащихся съ основами другихъ дисциплинъ, тѣмъ самымъ нанесетъ ущербъ своему предмету.—Докладчица говоритъ: „можно заставить сдѣлать то-то и то-то“. Да, заставить можно, но усвоятъ ли учащіеся преподносимый матеріалъ? Выучатъ и будутъ отвѣчать, но сознательно ли?“

В. А. Соколовъ (Майкопъ, Кубанск. обл.). „Въ докладѣ цѣнны указаніе на необходимость введенія вопросовъ изъ физики и требованіе связи преподаванія ариѳметики съ жизнью. Но безконечно-малыя не удастся въ первыя шесть лѣтъ обученія связать съ жизнью. Начинать выясненіе безконечно-малыхъ при помощи дробей нельзя, какъ это показываетъ опытъ; лучше выяснить это геометрическимъ путемъ. Огульное обвиненіе современной школы

въ томъ, что функциональная зависимость и симметрія не разсматриваются, несправедливо“.

Н. А. Колумбовская (Спб.). „Желательно выяснить, есть ли указанный курсъ систематическій или только подготовительный? Если подготовительный, то гдѣ и какъ можетъ идти систематическій курсъ? Если можно привѣтствовать указанный матеріалъ, то лишь для практическихъ работъ. Желательно указаніе, гдѣ и когда такой курсъ былъ проведенъ?“

А. Ф. Гамлихъ (Москва). „Въ докладѣ нельзя не привѣтствовать требуемаго при преподаваніи принципа наглядности и жизненности. Но погоня за многимъ создастъ много недоразумѣній. Какъ, напр., опытнымъ путемъ, какъ говоритъ докладчица, дать понятіе бесконечности, интерполяціи и экстраполяціи? Что останется отъ такого курса у дѣтей, начинающихъ обученіе, повиdimому, съ самаго малаго возраста?“

Н. А. Тамашева (Спб.). „На заданные мнѣ вопросы отвѣчу слѣдующее“.

„Курса по предлагаемой мною программѣ цѣликомъ я не проходила, такъ какъ я занималась въ женской гимназіи Министерства Народнаго Просвѣщенія, и не была свободна въ выборѣ матеріала. Но нѣкоторые вопросы, напр., отрицательныя числа, графики, опредѣленіе положенія точки при помощи координатъ, нѣкоторые наглядные способы опредѣленія площадей и объемовъ были пройдены мною, и не скажу, чтобы они вызвали больше затрудненій, чѣмъ тѣ вопросы, которые вводятся обыкновенно въ программу. Курсъ этотъ рассчитанъ на первые шесть лѣтъ обученія, т. е. приблизительно на возрастъ отъ 7 до 13 лѣтъ“.

„Мнѣ возражали, что пропедевтический курсъ геометріи нельзя начинать съ разсмотрѣнія искусственныхъ тѣлъ, а надо сначала дать дѣтямъ опредѣленіе точки, прямой. Но тѣло производить болѣе рельефное, выпуклое впечатлѣніе, оно легче поддается воспріятію органовъ чувствъ, съ нимъ дѣти постоянно встрѣчаются въ жизни, и поэтому выгоднѣе исходить отъ него и черезъ него притти къ понятію плоскости, линіи, точки“.

„Мнѣ говорили также, что въ предлагаемой мною программѣ на третій годъ приходится счисленіе лишь въ предѣлѣ тысячи, между тѣмъ, какъ въ жизни дѣтямъ приходится встрѣчаться съ числами значительно большими“. Я не считаю, конечно, обязательнымъ ограничиваться одной только первой тысячею; можно захватить числа первыхъ тысячъ, но не слѣдуетъ затруднять дѣтей вычисленіями надъ большими числами, тѣмъ болѣе, что съ ними приходится очень рѣдко имѣть дѣло“.

„Мнѣ было указано также, что врядъ ли будутъ доступны

дѣтямъ понятія интерполяціи и экстраполяціи, но я вѣдь предлагаю выяснитъ эти понятія на рядѣ задачъ при помощи графическаго метода послѣ того, какъ дѣтьми будутъ вполне усвоены понятія о функциональной зависимости, о графикахъ, уравненіяхъ и составленіи таблицъ значеній функций. При такихъ условіяхъ не думаю, чтобы это могло вызвать серьезное затрудненіе".

„Насчетъ вопроса о безконечности скажу слѣдующее: понятіе о безконечности врывается съ самаго начала въ изученіе математики. Образую натуральный рядъ чиселъ прибавленіемъ послѣдовательно по единицѣ, дѣти замѣчаютъ, что рядъ этотъ не имѣетъ конца, что какъ бы велико ни было послѣднее число этого ряда, мы всегда можемъ прибавить къ нему единицу и, слѣдовательно, получить число больше предыдущаго. Отсюда естественно вытекаетъ понятіе о безконечности. Отрицательныя числа, дѣленіе чиселъ на разряды, дроби, простыя и десятичныя, также могутъ служить иллюстраціей понятія о безконечности. Приступая къ изученію геометріи, мы сейчасъ же наталкиваемся на понятіе о безконечности прямой и плоскости. Такъ не лучше ли дать дѣтямъ при изученіи величинъ понятіе о безконечности, помочь имъ разобраться въ этомъ вопросѣ, чѣмъ замалчивать его и вносить незаконченность въ математическія представленія дѣтей, тѣмъ болѣе, что понятіе о безконечности какъ нельзя лучше вводитъ дѣтей въ область математики и роднитъ съ ея методами".

II. О некоторыхъ измѣненіяхъ въ программѣ по алгебрѣ въ женскихъ гимназіяхъ Министерства Нар. Просв., которыя желательно было-бы сдѣлать временно впредь до общей реформы женскихъ гимназій.

Докладъ Г. И. Кузнецова, составленный по порученію Новочеркасскаго Математическаго Кружка (Новочеркасскъ).

«Въ настоящее время, какъ извѣстно, программа по математикѣ въ семи-классныхъ женскихъ гимназіяхъ Мин. Нар. Пр. составлена такимъ образомъ, что курсъ ариметики проходитъ въ младшихъ четырехъ классахъ (I—IV) съ повтореніемъ его въ VII-мъ классѣ; курсъ же алгебры и геометріи проходитъ въ старшихъ классахъ (съ V-го по VII), если не считать пропедевтическаго курса геометріи, который долженъ

проходиться въ первыхъ трехъ классахъ (I-II-III), но который обычно не проходитъ, какъ таковой, въ виду недостатка времени.

Такъ какъ цѣлью нашего доклада является желаніе указать на неудобства, съ которыми приходится встрѣчаться при прохожденіи курса алгебры въ женскихъ гимназіяхъ Мин. Нар. Просв. и который желательно было бы устранить, то мы перейдемъ непосредственно къ главной нашей задачѣ, т. е. къ условіямъ прохожденія курса алгебры въ настоящее время, отчасти только касаясь условій прохожденія геометріи и совсѣмъ не останавливаясь на ариметикѣ.

Самое главное неудобство въ прохожденіи курса математики въ старшихъ классахъ заключается въ томъ, что изученіе алгебры начинается одновременно съ геометріей, т. е. ученицы V класса должны сразу входить въ два новыхъ круга идей, что, конечно, должно быть для нихъ весьма затруднительнымъ.

Далѣе, если всмотрѣться въ программу по алгебрѣ женскихъ гимназій, то изъ нея можно видѣть, что программа составлена такъ, что алгебра должна проходитьъ, какъ предметъ вспомогательный, необходимый для изученія геометріи; между тѣмъ, какъ изъ того самаго факта, что алгебра проходитъ, начиная съ V класса, одновременно съ геометріей, слѣдуетъ, что алгебра не можетъ долгое время оказывать пользу для изученія геометріи, какъ напр.:

1) чуть-ли не съ самаго начала рѣшенія численныхъ задачъ по геометріи необходимо прибѣгать къ уравненіямъ 1-ой степени (задачи на углы въ треугольникахъ, многоугольникахъ). А такъ какъ ученицы не умѣютъ рѣшать уравненій, то приходится ограничивать кругъ задачъ, избираемыхъ для рѣшенія пользуясь задачами, которые можно рѣшать приемами, извѣстными изъ ариметики;

2) при рѣшеніи задачъ на прямоугольный треугольникъ необходимо умѣть извлекать квадратный корень изъ чиселъ, какъ изъ цѣлыхъ, такъ и изъ дробныхъ (съ извѣстной точностью), или же надо каждый разъ подбирать точные квадраты цѣлыхъ чиселъ, квадратные корни изъ которыхъ можно находить съ

помощью разложенія на первоначальные множители, что, во-первых, весьма затруднительно при больших числахъ, а, во-вторыхъ, не всегда возможно, такъ какъ не всѣ данныя и не во всякомъ треугольникѣ могутъ быть всегда числами рациональными (треугольникъ съ угломъ въ 45° , 60° и т. п., діагональ квадрата);

3) при рѣшеніи задачъ на правильные многоугольники необходимо знать дѣйствія надъ радикалами (сторона квадрата, треугольника и т. д.);

4) при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ приходится встрѣчаться съ квадратнымъ уравненіемъ (a, q, b, p, c ?—Рыбкинъ, 342) и т. п.

Второе неудобство заключается въ распредѣленіи отдѣльныхъ статей алгебры по классамъ и состоитъ въ слѣдующемъ: почти весь учебный матеріалъ по алгебрѣ падаетъ на VI классъ (см. программу VI кл.), въ то время, какъ въ V классѣ предполагается проходить только предварительныя свѣдѣнія, приведеніе подобныхъ членовъ и дѣйствія надъ одночленами, а курсъ VII класса циркуляромъ Министра Нар. Пр. отъ 8 іюня 1900 г. перенесенъ цѣликомъ въ VIII классъ. Правда, въ программѣ по алгебрѣ VI класса нѣтъ упоминанія о разложеніи многочленовъ на первоначальные множители и объ алгебраическихъ дробяхъ, но вѣдь всякій изъ насъ знаетъ, что выкинуть этотъ отдѣлъ совершенно невозможно, и что прохожденіе его необходимо, какъ для развитія техники алгебраическихъ вычисленій, для сознательнаго рѣшенія уравненій, содержащихъ алгебраическія дроби, такъ и для развитія болѣе широкаго пониманія сущности самой алгебры. Но если задаться цѣлью пройти болѣе или менѣе основательно этотъ отдѣлъ алгебры, то на прохожденіе остальныхъ отдѣловъ программы оказывается весьма мало времени, вслѣдствіе чего приходится переносить на 7-ой классъ все, что касается теоріи квадратнаго корня, квадратнаго уравненія и вообще ирраціональностей, ограничиваясь въ VI классѣ извлеченіемъ квадратнаго корня изъ чиселъ и рѣшеніемъ квадратнаго уравненія безъ изслѣдованій его свойствъ и проч. (выдѣляя точный квадратъ изъ лѣвой части уравненія на численныхъ примѣрахъ). Указанное пере-

несеніе въ настоящее время возможно потому, что въ VII классѣ почти вся программа по алгебрѣ перенесена въ VIII классѣ. Но это послѣднее обстоятельство только отчасти облегчаетъ нашу задачу—пройти нѣкоторые отдѣлы алгебры по возможности ранѣе для того, чтобы облегчить рѣшеніе задачъ по геометріи; нельзя не признать, что въ данномъ случаѣ нарушается, какъ и стройность программы, такъ и научность изложенія курса, т. е. получается нѣкоторая скомканность.

Какъ же выйти изъ этого затрудненія?

На этотъ вопросъ можно отвѣтить такъ:—начать изученіе алгебры не съ V класса, а съ IV класса, т. е. на годъ раньше изученія геометріи, какъ дѣлается это въ мужскихъ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ. Нужно сказать, что и въ учебныхъ заведеніяхъ Вѣдом. Имп. Маріи мѣра эта проведена, какъ это видно изъ циркуляра Главноуправляющаго Вѣдомствомъ, если не ошибаюсь, отъ 12 іюня 1911 г., такъ что ученицы IV кл. женскихъ гимназій и институтовъ В. Им. М. съ осени этого года уже приступили къ изученію алгебры.

Замѣчаніе. (IV классѣ. Вступленіе. Отрицательныя числа. Алгебраическое сложеніе и вычитаніе.

III кл.—Умноженіе. Рѣшеніе уравненій 1-ой степени.

II кл.—Рѣшеніе уравненій со многими неизвѣстными. Квадратное уравненіе).

Кромѣ того, въ нѣкоторыхъ женскихъ епархіальныхъ училищахъ, въ которыхъ добавлены VII и VIII классы, изученіе алгебры также начинается съ IV кл., какъ, напр., въ Дойскомъ епархіальномъ училищѣ.

Такимъ образомъ, очередь осталась за женскими гимназіями Мин. Нар. Просв. Указанное измѣненіе является въ настоящее время необходимымъ еще по слѣдующей причинѣ. Какъ извѣстно, по новымъ правиламъ, которыя въ недалекомъ будущемъ получатъ силу закона, лица женскаго пола, прослушавшія курсъ наукъ въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ и желающія подвергнуться государственнымъ экзаменамъ, обязаны выдержать дополнительныя испытанія при мужскихъ гимназіяхъ по языкамъ—русскому, латинскому и одному изъ новыхъ,—а также по математикѣ и физикѣ по программѣ муж-

скихъ гимназій. По программа по математикѣ въ мужскихъ гимназіяхъ отчасти попоплется въ VIII классѣ женскихъ гимназій на отдѣленіи математики. Но и это пополненіе стоитъ очень большихъ трудовъ, какъ ученицамъ, такъ и преподавателю, и возможно только при хорошемъ составѣ VIII класса (нужно сказать, что во 2-мъ полугодіи изъ числа 6 недѣльных уроковъ около 2-хъ приходится на приготовленіе къ пробнымъ урокамъ, на самые уроки, разборъ и т. п.). Главнымъ затрудненіемъ является именно прохожденіе курса алгебры примѣнительно къ курсу мужскихъ гимназій (курсъ VI и VII классовъ мужскихъ гимназій). Въ случаѣ же перенесенія начала изученія алгебры на IV классъ и сопряженныхъ съ нимъ измѣненій программы алгебры въ остальныхъ классахъ явится возможность возстановить программу VII класса въ прежнемъ видѣ и такимъ образомъ облегчить ученицамъ VIII класса математическаго отдѣленія прохожденіе курса алгебры примѣнительно къ программѣ мужскихъ гимназій.

Итакъ, возвращаясь къ нашей главной цѣли, я отъ имени Новочеркасскаго Математическаго Кружка прошу, въ случаѣ согласія съ сущностью доклада, Первый Всероссийскій Сѣздъ Преподавателей Математики войти съ ходатайствомъ въ Мин. Народи. Просв. сдѣлать слѣдующія временныя измѣненія въ программы по алгебрѣ женскихъ гимназій.

Пунктъ I. Начать изученіе алгебры съ IV класса съ такимъ расчетомъ, чтобы курсъ алгебры въ женскихъ гимназіяхъ соотвѣтствовалъ приблизительно курсу мужскихъ гимназій слѣдующимъ образомъ (въ главныхъ чертахъ):

курсъ IV кл. женск. гимн.	курсу III кл. мужск. гимн.
» V » » »	» IV » » »
» VI » » »	» V » » »
» VII » » »	» VI » » »
» VIII » » »	» VII » » »

Пунктъ II. Отмѣнить циркуляръ отъ 8 іюня 1900 г. за № 14962, содержаніе котораго слѣдующее:

«исключить о кубическихъ корняхъ, прогрессіяхъ и логарифмахъ и перенести изученіе этихъ статей въ VIII классъ

и только тѣми ученицами, которыя избираютъ математику главнымъ предметомъ изученія, и сохранить повтореніе ариометики».

Пунктъ III. Увеличить число недѣльныхъ уроковъ по математикѣ въ III, IV и V классахъ съ 3-хъ до 4-хъ.

Нѣкоторыя объясненія относительно предлагаемыхъ пунктовъ.

Къ пункту I. 1) Къ курсу IV класса по алгебрѣ при 2-хъ урокахъ отнестъ: предварительныя понятія, отрицательныя числа; четыре дѣйствія съ одночленами; алгебраическія одночленные дроби; сложеніе, вычитаніе и умноженіе многочленовъ; дѣленіе многочлена на одночленъ; сокращенное умноженіе; рѣшеніе уравненій 1-ой степени съ численными знаменателями.

2) Къ курсу V класса: дѣленіе многочленовъ; сокращенное дѣленіе; простѣйшіе случаи разложенія многочленовъ на множители; алгебраическія дроби; рѣшеніе уравненій 1-ой степени въ общемъ видѣ.

3) Къ курсу VI класса: остальные пункты программы VI класса, т. е. о корняхъ, извлеченіе квадратнаго корня; квадратное уравненіе; дѣйствія съ радикалами.

4) Къ курсу VII класса: всѣ отдѣлы по прежней программѣ.

5) Курсъ VIII класса: примѣнительно къ курсу VII класса мужскихъ гимназій.

Къ пункту II. При возстановленіи программы VII класса желательнo не вводить статьи объ извлеченіи кубическаго корня изъ чиселъ.

Къ пункту III. Табелъ уроковъ въ женской гимназійи и мужской гимназійи въ данное время слѣдующій:

I кл. жен. гимн. 3 ур. пригот.				кл. мужск. гимн.—6 ур.				
II	»	»	3	I	»	»	»	4
III	»	»	3	II	»	»	»	4
IV	»	»	3	III	»	»	»	4
V	»	»	3	IV	»	»	»	4
VI	»	»	4	V	»	»	»	5
VII	»	»	4	VI	»	»	»	4
VIII	»	»	6	VII-VIII	»	»	»	3+3=6

Не касаясь числа уроковъ въ первыхъ классахъ, мы видимъ, что въ настоящее время въ 3-мъ классѣ полагается три урока на прохожденіе курса дробей противъ 4-хъ уроковъ II кл. мужскихъ гимназій, а въ IV классѣ три урока на прохожденіе тройныхъ правилъ противъ 2-хъ уроковъ III класса мужскихъ гимназій. Конечно, курсъ дробей проходить при 3-хъ урокахъ труднѣе, чѣмъ при 4-хъ, а потому обычно часть курса дробей переносится на IV классъ, что возможно, въ виду только что сказаннаго (въ IV кл. женск. гимн. на 1 урокъ болѣе, чѣмъ въ III кл. мужск. гимн.).

Переносъ начало изученія алгебры на IV классъ, мы должны удѣлѣть въ IV классѣ 2 часа въ недѣлю на алгебру изъ числа 3 уроковъ. Въ такомъ случаѣ, перенесеніе части курса дробей изъ III класса на IV-ый будетъ невозможно, да и на ариметику въ IV классѣ остается всего одинъ часъ въ недѣлю.

Въ виду этого, является необходимымъ увеличить число уроковъ въ III и IV классахъ съ трехъ до четырехъ часовъ въ недѣлю.

Увеличеніе числа уроковъ въ V классѣ не требуетъ объясненія. Возможно ли увеличеніе числа уроковъ? Названное увеличеніе вполнѣ возможно, ибо табель показываетъ, что ни въ одномъ изъ названныхъ классовъ число уроковъ не достигаетъ тридцати, а именно: въ III кл.—27 ур., въ IV кл.—28 и въ V кл.—26 (при слушаніи обоихъ новыхъ языковъ), причемъ число недѣльныхъ часовъ, назначенныхъ на предметы, по которымъ уроки не задаются на домъ, въ III кл.—8 ур., въ IV кл.—8 и въ V кл.—6 (къ этимъ предметамъ относятся: чистописаніе, рисованіе, рукодѣліе, пѣніе, танцы и гимнастика).

Пренія по докладу Г. П. Кузнецова.

Б. И. Мамалифъ (Воронежъ). „Во-первыхъ, слѣдуетъ перенести преподаваніе космографіи въ восьмой классъ, такъ какъ свѣдѣнія по стереометріи, необходимыя для космографіи, не имѣются у ученицъ седьмого класса, гдѣ только что начинается изученіе стереометріи“.

„Во-вторыхъ, дѣленіе многочлена на многочленъ слѣдуетъ сренести на седьмой классъ при повтореніи алгебры. мѣшать прохожденію курса это не будетъ, а между тѣмъ, полное пониманіе этой статьи чисто алгебраическаго характера возможно только при сравнительно хорошемъ математическомъ развитіи“.

„Въ третьихъ, слѣдуетъ освободить седьмой классъ отъ повторенія ариѳметики. Для дѣйствительно основательнаго повторенія ариѳметики времени нѣтъ, а между тѣмъ отнимается время на болѣе основательнаго повторенія алгебры и геометріи и лучшаго усвоенія курса на задачахъ. Ариѳметику (какъ и космографію) слѣдуетъ обязательно перенести въ восьмой классъ для ученицъ всѣхъ специальностей, потому что восьмой классъ даетъ право на учительницу начальной школы“.

И. М. Бюлгачевъ (Вольмаръ, Лифл. губ.). „Въ женскихъ гимназіяхъ необходимо видоизмѣнить распредѣленіе курса алгебры. Выполнить это можно такимъ образомъ: въ первыхъ трехъ классахъ слѣдуетъ пройти только чисто практическій курсъ ариѳметики и сохранить ея прикладную часть; тогда явится экономія во времени и можно, не увеличивая числа учебныхъ часовъ по ариѳметикѣ, ввести занятіе по алгебрѣ въ четвертомъ классѣ. Распредѣленіе же алгебраическаго матеріала по классамъ нѣтъ надобности строго распредѣлять, такъ какъ это зависитъ отъ метода преподаванія“.

„Въ седьмомъ классѣ вмѣстѣ съ алгеброй слѣдуетъ выяснитъ нѣкоторыя основныя положенія ариѳметики, чтобы подготовить ученицъ къ прохожденію методики ариѳметики въ восьмомъ классѣ“.

Л. З. Сокольская (Пенза). „Во-первыхъ, прохожденіе ариѳметики въ седьмомъ классѣ необходимо, такъ какъ не всѣ ученицы идутъ въ восьмой классъ; и желательно вмѣстѣ съ тѣмъ имѣть въ седьмомъ классѣ лишній часъ для ариѳметики. Во-вторыхъ, въ нѣкоторыхъ гимназіяхъ уже и теперь введены въ пятый классъ четыре часа, такъ что къ Рождеству возможно пройти игыре алгебраическихъ дѣйствій; въ пятомъ же классѣ приходится имѣть дѣло съ нулевыми и отрицательными показателями, наконецъ, лишнимъ является перенесеніе дѣленія многочлена на многочленъ въ шестой или седьмой классъ“.

Б. А. Марковичъ (Спб.). „Программы разныхъ отдѣловъ математики не согласованы не только съ космографіей, но и съ физикой. (Приходится въ самомъ началѣ курса физики говорить объ объемахъ и поверхностяхъ многогранниковъ и круглыхъ тѣлъ, и надо было бы дѣлать задачи на измѣреніе объемовъ и поверхностей, а стереометрія проходится лишь въ седьмомъ классѣ). Но даже и между собой программы разныхъ отдѣловъ

математики не согласованы. Напр., мы задаемъ въ пятомъ классѣ геометрическія задачи съ буквенными выраженіями, требующія знанія уравненій, а послѣднія изучаются лишь въ шестомъ классѣ, и часто—во второмъ полугодіи.

„Главное, однако, не въ программахъ, а въ методахъ обученія. Одинъ изъ предыдущихъ ораторовъ указалъ, что слѣдуетъ въ пятомъ классѣ воздержаться отъ дѣленія многочлена на много членъ; между тѣмъ, слѣдуя установленнымъ методамъ, онъ заставъ въ томъ же пятомъ классѣ примѣры умноженія и дѣленія сложныхъ одночленовъ съ буквенными и притомъ двучленными показателями“

„Это болѣе трудно и менѣе понятно, чѣмъ дѣленіе многочлена на двучленъ (положительно необходимое для многихъ преобразованій и доказательствъ) и даже на трехчленъ съ несложными коэффициентами и небольшими числовыми показателями. Другими примѣрами служатъ наши бесполезныя и бессмысленныя задачи коммерческаго характера, притомъ помощью устарѣлыхъ методовъ (пропорціи и др.). Наконецъ, наши ариѳметическія задачи такъ называемаго „алгебраическаго характера“, рѣшаемыя безъ помощи уравненій“.

„Такимъ образомъ, основной вопросъ не въ перераспредѣленіи учебныхъ часовъ, хотя, конечно, въ частныхъ случаяхъ и это можетъ оказаться полезнымъ, а въ реформѣ преподаванія и всего учебнаго плана“.

К. И. Соколовскій (Маріинскъ, Томск. губ.). „Увеличеніе часовъ на алгебру за счетъ ариѳметики путемъ сведенія ея на чистую практическую почву счета не желательно. Да и на прохожденіи ариѳметики-счета понадобится больше времени, чѣмъ на теперешнюю полутеоретическую ариѳметику. Главная же ненормальность постановки преподаванія въ женской гимназіи,—это двойное требованіе отъ восьмого класса: классъ этотъ долженъ дать ученицамъ и завершеніе общаго средняго образованія, и въ то же время сдѣлать изъ нихъ специалистовъ-педагоговъ. Слѣдовало бы либо восьмой классъ оставить общеобразовательнымъ и тогда учредить девятый классъ, специально педагогическій, либо параллельно съ восьмымъ классомъ общеобразовательнымъ установить восьмой специально-педагогическій. Только послѣ рѣшенія этого вопроса можно обсуждать программы“.

А. А. Чебышевъ-Дмитріевъ (Спб.). „Во-первыхъ, временныя примѣры, предлагаемая докладчикомъ, могутъ быть осуществлены безъ особыхъ постановленій Съѣзда, при добромъ желаніи учащаго персонала, педагогическихъ и попечительныхъ совѣтовъ (примѣръ—Царскосельская ж. г. М. Н. П.). Во-вторыхъ, почти главнымъ и вмѣстѣ съ тѣмъ труднымъ и жгучимъ вопросомъ

является вопросъ о постановкѣ преподаванія въ восьмомъ классѣ,—придать ли этому преподаванію общеобразовательный или педагогическій характеръ?”

М. А. Сахновскій (Черниговъ). „Жизнь показала необходимость широкаго общаго образованія женщинъ, поэтому полумѣры, предлагаемыя Новочеркасскимъ Математическимъ Кружкомъ, должны быть отвергнуты. Съѣзду слѣдовало бы формулировать свою резолюцію въ видѣ желательности полной тождественности программъ женскихъ гимназій съ таковыми же реформированными мужскихъ гимназій“.

Р. К. Давидовъ (Кишиневъ). „Мнѣ удалось избѣжать нѣкоторыхъ затрудненій, указанныхъ предыдущими ораторами. Въ пятомъ классѣ до 1-го ноября ведется курсъ алгебры при трехъ часахъ, а послѣ 1-го ноября—курсъ геометріи при двухъ часахъ и алгебры при одномъ. Теорія уравненій проходитъ черезъ весь курсъ пятого и шестого классовъ. Въ седьмомъ классѣ курсъ космографіи начинается съ описательной части. Въ восьмомъ классѣ въ первомъ полугодіи пять часовъ отдается на теоретическій курсъ и одинъ часъ на методику, а во второмъ полугодіи на методику отходить три часа“.

А. Л. Остроумова (Тихвинъ, Новгородск. губ.). „Необходимо изученіе методикъ русскаго языка и ариѳметики для всѣхъ кончающихъ гимназію, безъ исключенія, чтобы будущія матери могли умѣло помогать своимъ дѣтямъ въ начальномъ обученіи“.

И. М. Бьялтенева (Вольмаръ, Лифлянд. губ.). „О полномъ уравненіи программъ среднихъ мужскихъ и женскихъ учебныхъ заведеній говорить преждевременно, такъ какъ авторитеты по вопросамъ женскаго образованія, напр., Скойденъ, находятъ, что женское образованіе должно итти особымъ путемъ, сообразно требованіямъ природы женщины“.

В. В. Токаревъ (Новомосковскъ, Екатеринослав. губ.). „Вопервыхъ, репетированіе должно исчезнуть изъ обученія,—въ этомъ стремленіе школы,—и этотъ мотивъ разницы женскаго и мужскаго образованія отпадаетъ. Во-вторыхъ, число уроковъ должно быть увеличено на одинъ часъ въ четвертомъ классѣ и на одинъ въ пятомъ. Въ третьихъ, космографія должна носить только описательный характеръ при настоящемъ математическомъ уровнѣ ученицъ седьмого класса“.

Г. И. Каширинъ (Ржевъ, Твер. губ.). „Курсъ космографіи долженъ быть пройденъ въ седьмомъ классѣ. Этотъ курсъ расширять воззрѣнія ученицъ на окружающую природу, и лишить этихъ знаній нашихъ ученицъ было бы жестоко. Курсъ Покров-

скаго даетъ ученицамъ полную возможность легко усвоить основныя положенія космографіи".

А. Л. Остроумова (Тихвинъ, Новгород. губ.). „Космографію въ седьмомъ классѣ можно преподавать безъ особыхъ математическихъ выкладокъ и при этомъ дать ясныя и опредѣленныя понятія о движеніи солнца, луны и т. д.".

Г. П. Кузнецовъ (Новочеркасскъ). „Временныя мѣропріятія предлагаемыя Новочеркасскимъ Математическимъ Кружкомъ, необходимы; нельзя согласиться съ оппонентомъ, считающимъ эти мѣропріятія за полумѣры и требующимъ полной реформы. На самомъ дѣлѣ, предлагаемыя мѣры не терпятъ отлагательства, такъ какъ уже и теперь многія ученицы теряютъ лишній годъ для приготовления къ такъ называемымъ дополнительнымъ при мужскихъ гимназіяхъ испытаніямъ. За эти мѣропріятія говоритъ какъ жизнь такъ и возможность немедленнаго ихъ проведенія. Что же касается того, что нѣкоторые шаги въ указанномъ направленіи уже слѣданы въ нѣкоторыхъ частныхъ гимназіяхъ, и поэтому лишнимъ будто бы явится резолюція Съѣзда въ желательномъ для Кружка смыслѣ, то противъ этого надо сказать, что измѣненія программъ по отдѣльнымъ гимназіямъ встрѣтятъ много препятствій: нѣтъ солидарности преподавателей математики съ одной стороны педагогическихъ совѣтовъ съ другой; кромѣ того, надо согласіе почетныхъ совѣтовъ и разрѣшеніе Попечителя Учебнаго Округа".

„Замѣчанія нѣкоторыхъ оппонентовъ выходятъ изъ рамокъ доклада, изъ этихъ замѣчаній слѣдуетъ отмѣтить учрежденіе восьмого класса съ общобразовательнымъ характеромъ; но это и требуетъ много времени въ виду законодательнаго характера этого предложенія".

„Остается отвѣтить на отдѣльныя возраженія".

1) Въ седьмомъ классѣ полагается только повтореніе арифметики, прохожденіе же дополнительныхъ статей обязательно для ученицъ восьмого класса, которыя, какъ будущія домашнія учительницы, обязаны пройти арифметику по программѣ мужскихъ гимназій. 2) Прохожденіе статьи о дѣленіи многочлена на многочленъ не встрѣчаетъ большихъ затрудненій. 3) При первоначальномъ изученіи алгебры необходимо только понятіе о нулевомъ, отрицательномъ показателяхъ; дѣйствія же съ этими и дробными показателями необходимо проходить непосредственно передъ изученіемъ логарифмовъ. 4) Успѣшное прохожденіе алгебры, о которомъ сообщалось здѣсь, можетъ быть объяснено лишь особыми благоприятными условіями, напр., увеличеніемъ числа часовъ, личною исключительною опытностью преподавателя".

Второе засѣданіе.

30 Декабря 8 ч. веч.

III. О результатахъ преподаванія началъ анализа бесконечно-малыхъ, аналитической геометріи и теоретической ариметики въ реальныхъ училищахъ и въ гимназіяхъ.

Сообщеніе проф. П. А. Некрасова (Спб.).

Докладчикъ сообщалъ, что интересуясь постановкою преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, онъ посѣщалъ въ прошломъ учебномъ году классы Петербургскихъ гимназій и реальныхъ училищъ, гдѣ нынѣ проходятся въ старшихъ классахъ теоретическая ариметика и основанія анализа бесконечно-малыхъ.

По мнѣнію профессора Некрасова, распоряженіе о введеніи курса теоретической ариметики было встрѣчено, какъ въ гимназіяхъ, такъ и въ реальныхъ училищахъ, преподавателями различно. Многіе недоумѣвали, какой матеріалъ долженъ быть войти въ составъ курса. Курсъ оказался, вообще говоря, сконканнимъ; старались удовлетворить только формальнымъ требованіямъ. Въ одной гимназіи, однако, результаты преподаванія оказались превосходными. Программа, сходная съ той, которую сообщалъ на Съѣздѣ г. Піотровскій, была проведена преподавателемъ (директоромъ гимназіи) систематично и классъ усвоилъ курсъ, при оживленномъ отношеніи учениковъ къ дѣлу. Докладчикъ полагаетъ, что тамъ, гдѣ знаютъ, какъ поставить курсъ теоретической ариметики, дѣло можетъ идти; въ противномъ же случаѣ возникновеніе недоразумѣній естественно.

Что касается аналитической геометріи, то здѣсь, по мнѣнію профессора Некрасова, дѣло идетъ успѣшнѣе и этотъ предметъ безъ особыхъ затрудненій является достояніемъ учениковъ.

Относительно преподаванія основаній анализа бесконечно-малыхъ, докладчикъ сообщалъ, что въ одномъ реальномъ училищѣ ученики усвоили начала дифференціальнаго исчисленія

и давали хорошіе отвѣты. Преподаватель былъ опытный и сумѣлъ обойти осложненія; опредѣленія давались по существу, элементарныя, краткія, несложныя. Пачала же интегральнаго исчисленія давались ученикамъ съ большимъ трудомъ, здѣсь даже опытный преподаватель не могъ почти ничего сдѣлать, при отведенномъ времени на преподаваніе. Можетъ быть это зависѣло отъ новизны дѣла и отъ излишнихъ осложненій, вносимыхъ въ предметъ преподавателями. Со стороны преподавателей иногда предлагалось много усердія, но отвѣты учениковъ были нудныя, несвязныя. Видно, что ученики думали, старались понять и усвоить, но предметомъ они не овладѣли, когда дѣло касалось усложненныхъ понятій. Дифференцировать сознательно и съ объясненіями ученики всѣхъ реальныхъ училищъ могли.

Въ одномъ изъ московскихъ училищъ, гдѣ докладчикъ наблюдалъ преподаваніе въ концѣ учебнаго года, началъ интегральнаго исчисленія также, какъ оказалось, не успѣли даже коснуться.

Но письменнымъ работамъ учениковъ нѣкоторыхъ учебныхъ округовъ, которыя разсматривалъ профессоръ Некрасовъ, онъ затрудняется сдѣлать какой-нибудь опредѣленный выводъ о степени усвоенія матеріала учениками, такъ какъ задачи были очень просты и шаблонны.

Общее заключеніе профессора Некрасова состоитъ въ томъ, что введеніе въ курсъ реальныхъ училищъ началъ анализа бесконечно-малыхъ, при наличности опытнаго преподавателя, можетъ внести очень многое въ общее развитіе учащихся и что замѣчающіеся въ настоящее время недочеты, объясняющіеся главнымъ образомъ новизною дѣла, со временемъ сгладятся.

Пренія по сообщенію проф. П. А. Некрасова.

М. Р. Блюменфельдъ (Спб.) сообщилъ Собранію, что въ одномъ изъ петербургскихъ частныхъ реальныхъ училищъ курсъ анализа бесконечно-малыхъ проходитъ въ значительно большемъ объемѣ, чѣмъ это требуется официальными программами 1907 года.

А. Д. Санько (Курскъ). „Курсъ седьмого класса при пяти урокахъ въ недѣлю содержитъ пять отдѣльныхъ предметовъ. Можетъ быть, лучше было бы соединить анализъ и алгебру въ

одинъ курсъ «введеніе въ изчисленіе бесконечно-малыхъ». Здѣсь будутъ изложены статьи о предѣлахъ, о функціи, о графикахъ функціи, о видахъ и свойствахъ функціи, въ частности —цѣлой только послѣ этого понятіе о производной (нахожденіе производной отъ функціи одной независимой переменнѣй), теорема Ролля, \max и \min ».

М. Г. Попрѣженко (Спб.). «Конструкціи курса анализа бесконечно-малыхъ могутъ быть различны,—можно его сжать или расширить,—но во всякомъ случаѣ нельзя ограничиться только понятіемъ о производной, а необходимо приложить его къ изслѣдованію хода функціи, къ возрастанію и убыванію ея, къ опредѣленію \max и \min , къ рѣшенію геометрическихъ, механическихъ, физическихъ и иныхъ задачъ. При недостаткѣ времени можно отказаться отъ нѣкоторыхъ теоремъ о предѣлахъ, ограничить область разсматриваемыхъ функцій и, въ крайнемъ случаѣ, отказаться отъ интегральнаго исчисленія».

Н. А. Зборовскій (Новгородъ). «Программу седьмого класса реальныхъ училищъ желательно сохранить; но при такой программѣ ученики *перестужены*, нѣтъ времени у учениковъ на продумываніе, усвоеніе проходимого. Необходимо восьмой классъ, тогда въ седьмомъ классѣ будетъ усвоена аналитическая геометрія, а въ восьмомъ—дифференціальное и интегральное исчисленія».

А. И. Казаровъ (Ейскъ, Кубанск. обл.). «Въ виду недостатка времени для прохожденія анализа можно предложить слѣдующее:

1) Часть курса геометріи, до подобія треугольниковъ, отнести къ четвертому классу. 2) Элементарныя свѣдѣнія по тригонометріи и разсмотрѣніе простѣйшихъ случаевъ рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ проходить въ пятомъ классѣ въ связи съ геометрией. 3) Курсъ тригонометріи заканчивать въ шестомъ классѣ. 4) Такъ какъ неопредѣленные уравненія требуются впоследствии для «теоріи чиселъ», не изучаемой въ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ, то выключить эти уравненія и отнести теорію общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго къ отдѣлу дробей въ курсѣ алгебры; тогда получится возможность посвятить въ седьмомъ классѣ всѣ пять часовъ аналитической геометріи, изученію свойствъ цѣлой функціи и анализу».

Проф. П. А. Некрасовъ. «По наблюденіямъ, сдѣланнымъ въ петербургскихъ учебныхъ заведеніяхъ, понятіе о предѣлѣ и основныя теоремы о предѣлахъ устанавливаются раньше, до седьмого класса, а это даетъ большую экономію во времени. Затѣмъ, какъ въ петербургскихъ гимназіяхъ, такъ и въ реальныхъ училищахъ, понятіе о функціи негласнымъ образомъ уже вошло въ обиходъ. Въ импровизированномъ моемъ докладѣ не было упомянуто о при-

ложеніяхъ производной. Но, конечно, послѣ того, какъ дано понятіе о производной, должны быть пройдены и приложенія ея къ изслѣдованію функций, максимум'a и минимум'a функций, а также и приложенія интегральнаго исчисленія къ геометріи. Что касается установленія существованія производной, то здѣсь замѣчено больше всего трудности. Одни преподаватели обходили эту трудность, не вникая глубоко въ суть функций, не говорили о непрерывности и дальше «особыхъ точекъ» не шли. Другіе, наоборотъ, вдавались въ большія тонкости, говорили даже о функцияхъ, не имѣющихъ производной. Въ заключеніе можно утверждать, что экономія, достигнутая надлежащей подготовкой учениковъ въ предыдущихъ классахъ, позволить даже при одномъ только часѣ въ седьмомъ классѣ дать закругленный курсъ началъ дифференціальнаго исчисленія, но, конечно, не интегральнаго».

IV. Къ вопросу объ экзаменахъ по математикѣ въ средней школѣ.

Докладъ В. А. Марковича (Сиб.).

I.

Испытанные экзамены.

Алгебра и арифметика. 1) На письменныхъ экзаменахъ русской средней школы по алгебрѣ предлагаются одна или двѣ задачи, въ рѣшенія которыхъ учащіеся должны обнаружитъ знаніе элементарныхъ преобразованій и достаточный навыкъ въ вычисленіяхъ.

2) Общій характеръ этихъ задачъ—ихъ сложность, громоздкость и совершенно фантастическія комбинаціи математическихъ заданій, которыя не могутъ встрѣтиться ни въ практическихъ примѣненіяхъ, ни на какой-либо послѣдующей ступени теоретическаго обученія математики¹⁾.

Эти задачи явно распадаются на нѣсколько отдѣльныхъ (3 и больше), а эти, въ свою очередь, — на нѣкоторое число вычисленій; въ общемъ, получается цѣлый рядъ элемен-

¹⁾ Типичные образцы такого рода задачъ можно найти въ сборникѣ Бячкова (напр., Отд. IV, № 1557 и «Сибирскія задачи»—Изд. XII) и въ новѣйшемъ сборникѣ Платова—№№ 475, 491 и др.

тарныхъ преобразованій и вычисленій по заученнымъ формуламъ. Встрѣчающіеся въ этихъ задачахъ уравненія даются готовыми или, вообще, сразу составляются—чисто механически; лишь въ немногихъ сравнительно случаяхъ предлагается составленіе уравненія по сложнымъ и запутаннымъ условіямъ, но всѣ эти «трудныя составленія» сводятся къ немногимъ традиціоннымъ, излюбленнымъ типамъ (бассейны, курьеры съ ихъ разповидностями; ученики, ошибающіеся при умноженіи; переливаніе изъ одного сосуда въ другой и пр., и пр.). Поэтому и задачи послѣдней категоріи, вообще, не трудны для учениковъ, получающихъ долгую и спеціальную подготовку къ задачамъ этихъ излюбленныхъ типовъ.

3) Вѣрныя рѣшенія такихъ задачъ свидѣтельствуютъ больше всего объ аккуратности вычисленій (небольшая ошибка, даже опска, въ началѣ рѣшенія часто подрываютъ весь послѣдующій ходъ, чрезвычайно осложняя остальные вычисления; иногда такія ошибки приводятъ къ алгебраическимъ формамъ, неразрѣшимымъ средствами элементарной математики,—получается, напр., обыкновенное уравненіе четвертой степени вмѣсто «возвратнаго»).

4) Практика, однако, показываетъ, что средняя быстрота вычисленій и аккуратность въ производствѣ отдѣльныхъ дѣйствій не равнозначны умѣнью вычислять — въ смыслѣ умѣлаго пользованія сокращенными приѣмами и выбора наиболѣе выгоднаго сочетанія дѣйствій: вычисленія производятся элементарно и топорно.

5) Такіе результаты совершенно не окунаютъ громадной затраты учебнаго времени, посвящаемого въ старшихъ классахъ спеціальной, систематической тренировки учениковъ въ задачахъ указаннаго типа.

6) Тѣ же соображенія относятся и къ письменнымъ работамъ по арифметикѣ: въ нихъ еще рѣзче обнаруживается неумѣніе вычислять.

Въ виду этого желательно:

А) Содержаніе письменныхъ работъ раздѣлять на рядъ вопросовъ, задачъ и размѣровъ.

В) Часть матеріала должна быть посвящена вычисленіямъ и преобразованіямъ, но рѣшеніе предлагаемыхъ примѣровъ должно свидѣтельствовать не только о знаніи формулъ и дѣйствій и аккуратности въ ихъ примѣненіи, но также объ умѣлости ученика выбирать наиболѣе выгодныя комбинаціи дѣйствій и пользоваться нѣкоторыми сокращенными приемами.

С) Остальная часть вопросовъ должна касаться теоріи и обнаружить умѣніе экзаменующагося ясно доказывать отдѣльныя теоремы и послѣдовательно, хотя бы и конспективно, излагать содержаніе различныхъ отдѣловъ (главъ) теоретическаго курса.

Д) При этихъ условіяхъ письменная работа можетъ получить преобладающее, — или даже исключительное, — значеніе въ экзаменной аттестаціи.

Геометрія и тригонометрія. 7) Обычныя теперь работы по геометріи и тригонометріи значительно болѣе цѣлесообразны чѣмъ соотвѣтственныя заданія по алгебрѣ; однако, и онѣ не свободны отъ излишней сложности и даже вычурности.

8) Спеціальная подготовка учениковъ къ обычнымъ экзаменационнымъ работамъ также отвлекаетъ слишкомъ много учебнаго времени, въ ущербъ болѣе производительной работѣ учениковъ и преподавателя.

Въ виду этого желательно:

Е) Предлагать на письменныхъ экзаменахъ менѣе сложныя заданія; кромѣ задачъ и примѣровъ (тригонометрическихъ) свидѣтельствующихъ о навыкѣ въ преобразованіяхъ и вычисленіяхъ, требовать, хотя и не подробныхъ, но ясныхъ, послѣдовательныхъ отвѣтовъ по вопросамъ теоріи.

II.

Устные экзамены.

9) Не распространяясь объ общеизвѣстныхъ отрицательныхъ сторонахъ устныхъ испытаній, можно согласиться, что при предлагаемомъ характерѣ письменныхъ экзаменовъ устные должны получить второстепенное значеніе.

Г) Желательно установить для устных экзаменовъ характеръ бесѣды (коллоквиумъ) по поводу письменной работы ¹⁾.

Пренія по докладу Б. А. Марковича.

К. О. Лебединцевъ (Москва). „Вполнѣ согласенъ со всѣми положеніями докладчика, но нахожу, что предлагаемыя имъ мѣры представляютъ только минимумъ необходимыхъ измѣненій. Дѣло въ томъ, что экзамены не обнаруживаютъ дѣйствительныхъ познаній учащихся по предмету. Всякій педагогъ знаетъ, что экзаменаціонныя отвѣты и работы учащихся, даже лучшихъ, нерѣдко оказываются болѣе слабыми, чѣмъ можно было бы ожидать, а темпъ работы у всѣхъ вообще учащихся при экзаменаціонной обстановкѣ замедляется. То же самое подтверждаютъ и экспериментально-психологическія изслѣдованія послѣдняго времени (напр., работы Лобзина). Въ виду этого, дѣйствительную оцѣнку познаній учащихся можно производить только на основаніи ряда самостоятельныхъ работъ учащихся, домашнихъ и классныхъ, распределенныхъ въ теченіе всего учебнаго года и поставленныхъ такъ, чтобы онѣ не носили экзаменаціоннаго характера“.

З. А. Архимовичъ (Кіевъ). „Вопросъ объ экзаменахъ находится въ зависимости отъ требованій, предъявляемыхъ къ выпускному классу. Прежде задачи для экзаменовъ въ восьмомъ классѣ присылались изъ учебныхъ округовъ, и онѣ отличались громоздкостью. Теперь хотя задачи для экзаменовъ предлагаются преподавателями, но по прежнему рецензированіе работъ производится учебными округами, и гг. рецензенты удовлетворяются только громоздкими задачами, считая, что на такихъ задачахъ испытуемые могутъ показать разностороннее знаніе отдѣловъ математики. Такимъ образомъ, преподаватели поставлены въ необходимость тренировать своихъ учениковъ въ установленномъ направленіи. Отсюда понятенъ спросъ на задачки со сложными громоздкими задачами. Тренировка учениковъ въ умѣніи рѣшать сложныя задачи отнимаетъ много времени и лишаетъ возможности остановиться на интересныхъ дополненіяхъ курса, способствующихъ уясненію и углубленію знаній учениковъ. Отмѣна рецензирования работъ учебными округами явится мѣрой, способствующей повышенію математическаго образованія въ средней школѣ. Наконецъ, слѣдуетъ отмѣтить, что экзаменаціонныя работы большинства

¹⁾ Это можетъ служить не только матеріаломъ для болѣе полной оцѣнки знаній учащагося, но и средствомъ обнаружить недобросовѣстность работы, въ случаѣ соответственныхъ подовѣрій.

учениковъ по совершенно понятнымъ причинамъ значительно ниже ихъ знаній, а потому качество этихъ работъ не можетъ служить вѣрнымъ показателемъ познаній учениковъ и характеристической постановки преподаванія въ данной школѣ".

С. Я. Гурковъ (Ст. Каменская, Дон. обл.). „Реальные училища, помимо всего прочаго, должны считаться съ тѣми требованіями, которыя предъявляются къ молодымъ людямъ на конкурсныхъ экзаменахъ въ специальныхъ училищахъ".

Б. А. Марковичъ. „Устанавливая согласіе гг. членовъ Съѣзда со всѣми положеніями доклада, отмѣчаю еще разъ создавшееся ненормальное положеніе большинства современныхъ школъ, обратившихся въ школы тренировки. Будемъ надѣяться, что голосъ Съѣзда поможетъ облегчить созданіе лучшей программы и лучшихъ условій для средней школы".

Къ своему докладу Б. А. Марковичъ приложилъ слѣдующій проектъ резолюцій по вопросу объ экзаменахъ.

1) Принимая во вниманіе:

а) что задачи, какъ предлагаемыя для письменныхъ работъ на выпускныхъ экзаменахъ средней школы, — особенно по алгебрѣ и арифметикѣ, — лишены практическаго смысла и сводятся къ ряду непосредственныхъ вычисленій или къ составленію уравненій небольшого числа шаблонныхъ типовъ;

б) что, несмотря на искусственную сложность такихъ задачъ, они захватываютъ лишь 3 или 4, рѣдко 5 вопросовъ изъ различныхъ отдѣловъ учебнаго предмета и потому не могутъ дать обстоятельной оцѣнки знаній экзаменующагося и степени его математическаго развитія;

в) что, изъ виду обязательности такого типа задачъ, преподаватели принуждены терять очень много учебнаго времени въ 7-омъ и особенно въ 8-омъ классахъ для специфическаго подготовленія учениковъ къ требуемымъ вычурнымъ задачамъ, что крайне неблагоприятно отражается на общемъ ходѣ преподаванія, — съѣздъ высказываетъ пожеланіе, чтобы педагогическіе совѣты не были стѣсняемы въ выборѣ темъ для выпускныхъ письменныхъ испытаній какими-либо обязательными шаблонами вродѣ нынѣ предписываемыхъ учебными вѣдомствами.

При этомъ съѣздъ рекомендуетъ педагогическимъ совѣтамъ

а) по алгебрѣ — ставить по нѣскольку отдѣльныхъ вопро-

совъ теоріи и отдѣльныя задачи, требующія умѣлыхъ, характерныхъ, но не продолжительныхъ и притомъ искусственныхъ сложныхъ вычисленій¹⁾.

б) *по геометріи*—кромѣ задачъ на вычисленіе и притомъ безъ примѣненія тригонометрическихъ и логарифмическихъ вычисленій, ставить теоретическіе вопросы, вродѣ доказательства какой-нибудь основной теоремы или положенія систематичнаго того или другого отдѣла (філіація теоремъ и слѣдствій).

в) *по тригонометрії*—ставить: 1) одинъ или два теоретическихъ вопроса; 2) несложную или простую задачу съ небольшимъ числомъ логарифмическихъ вычисленій; 3) стереометрическую задачу, требующую примѣненія тригонометрическихъ функцій и преобразованій, но не слишкомъ трудныхъ и сложныхъ.

г) *по арифметикѣ*, если только не будутъ измѣнены программы и пока будутъ обязательны выпускныя испытанія по общему курсу арифметики,—ставить: 1) примѣры, которые могли бы обнаружитъ умѣлость и навыкъ въ вычисленіяхъ; 2) задачу, имѣющую фактическій смыслъ, напр., вычисленіе доходности какого-нибудь предпріятія, хотя-бы по многимъ даннымъ, но однороднаго характера, или расчетъ стоимости себя надѣлій въ зависимости отъ реальныхъ факторовъ.

2) Въ частности, относительно арифметическихъ задачъ, Съѣздъ высказываетъ пожеланіе, чтобы ученики не были припущены вычислять и разсуждать по устарѣлымъ или элементарнымъ приѣмамъ (младшихъ классовъ) и получили право пользоваться могучимъ пособіемъ составленія уравненій и преобразованій, относимыхъ теперь къ курсу алгебры.

3) Принимая во вниманіе, что при указанномъ, болѣе раціональномъ выборѣ темъ для письменныхъ работъ, возможна обстоятельная оцѣнка знаній и развитія ученика, Съѣздъ высказываетъ пожеланіе, чтобы устные экзамены, со всею ихъ неблагоприятною для оцѣнки знаній экзаменующагося обстановкою, были замѣнены устною бесѣдою (colloquium) по поводу ошибокъ поданной работы или въ случаѣ подозрѣнія въ ея самостоятельности.

¹⁾ Веселій циркуляръ 1912 г. по Мин. Нар. Просв. вполне соответствуетъ указанному пункту проекта реформы.

3-я секція.

Методика математики.

Предсѣдатель секціи: С. И. Шохоръ-Троцкій.

Товарищъ предсѣдателя: В. А. Крогіусъ.

Секретари: А. Е. Дувина, К. И. Зрене, А. Н. Наврентьева и С. Р. Соколовскій.

Организаціоннымъ Комитетомъ Съѣзда были объявлены въ программѣ Съѣзда слѣдующіе доклады къ заслушанію въ 3-ей секціи:

1) Д. Д. Галанинъ (Москва). «Объ измѣненіи метода обученія въ низшей и средней школѣ».

2) О. А. Эрнъ (Рига). «Спорные вопросы въ современной методикѣ ариметики».

3) К. О. Лебединцевъ (Москва). «Методъ обученія математикѣ въ старой и новой школѣ».

4) К. О. Лебединцевъ (Москва). «Вопросъ о дробяхъ въ курсѣ ариметики».

5) В. А. Крогіусъ (Спб.). «Приближенныя и сокращенныя вычисленія».

6) Д. М. Левицусъ (Спб.). «Объ алгебраическихъ преобразованіяхъ».

7) Б. А. Марковичъ (Спб.). «Желательныя измѣненія въ преподаваніи въ средней школѣ теоріи и практики логарифмовъ».

*8) В. Р. Мрочекъ (Спб.). «О функціональности».

*9) Г. А. Грузинцевъ (Кологривъ, Костр. губ.). «О преподаваніи тригонометріи».

10) Д. Э. Теннеръ (Спб.). «О графическихъ иллюстраціяхъ рѣшеній системы уравненій».

11) И. М. Трапчатовъ (Спб.). «О первой теоремѣ элементарной геометріи Эвклида».

12) П. А. Долгушинъ (Кіевъ). «Неэвклидова геометрія въ средней школѣ».

Докладъ П. А. Долгушина былъ сдѣланъ на общемъ собраніи и помѣщенъ въ I томѣ «Трудовъ» съѣзда.

13) Е. С. Томашевичъ (Москва). «Принципы совмѣстности плоскихъ и пространственныхъ фигуръ».

14) Д. М. Левитусъ (Спб.). «О роли геодезическихъ упражненій при обученіи математикѣ».

15) С. А. Неаполитанскій (Варшава). «Элементы логики въ школьной математикѣ».

Сверхъ докладовъ, объявленныхъ въ программѣ Съѣзда, секціей были заслушаны:

1) Н. П. Поповъ (Заку). «О лабораторныхъ занятіяхъ по математикѣ въ среднихъ уч. заведеніяхъ Кавказскаго учебнаго округа».

2) Н. Н. Александровъ (Москва). «Построеніе параллелограмовъ».

3) Л. А. Сельскій (Варшава). «Вопросъ объ измѣреніяхъ въ системѣ арифметики».

Кромѣ общихъ собраній секцій, состоялись два частныхъ совѣщанія, возникшихъ по инициативѣ нѣкоторыхъ членовъ секцій. Одно изъ нихъ, сначала подъ предсѣдательствомъ С. И. Шохоръ-Троцкаго, а затѣмъ—Н. А. Колубовскою, было посвящено вопросу о курсѣ математики въ женскихъ гимназіяхъ; другое, подъ предсѣдательствомъ О. А. Эрпа—вопросу о возможныхъ сокращеніяхъ курса математики въ школѣ. Въ результатѣ перваго изъ этихъ совѣщаній получилось пожеланіе участниковъ его, чтобы курсъ математики въ женскихъ и мужскихъ школахъ былъ одинаковъ. На совѣщаніи подъ предсѣдательствомъ О. А. Эрпа докладчикомъ выступилъ С. И. Шохоръ-Троцкий. Выяснилось, что путемъ перераспредѣленія учебнаго матеріала, перенесенія нѣкоторыхъ статей курса изъ однихъ классовъ въ другіе и путемъ прямого исключенія нѣкоторыхъ ингредиентовъ курса изъ учебныхъ плановъ и программъ, можно достигнуть большого выигрыша времени. Протоколы этихъ частныхъ совѣщаній, за недостаткомъ мѣста, не помѣщаются въ «Трудахъ Съѣзда».

Въ секретаріатъ секцій поступило также заявленіе члена съѣзда Д. П. Цинзерлинга о желательности раздѣленія курса математики на двѣ ступени, отчасти совпавшее съ пожеланіями, выраженными въ нѣкоторыхъ резолюціяхъ Съѣзда.

Первое засѣданіе.

27 декабря 8 ч. веч.

Предсѣдательствовалъ С. И. Шохоръ-Троцкий.

Почетный предсѣдатель—И. И. Александровъ.

Предсѣдатель. «Было время, и это время далеко еще не прошло, когда къ методикѣ математики даже достойные всяческаго уваженія представители математики, какъ науки и учебнаго предмета, относились съ пренебреженіемъ и когда такъ отпоситься къ этой отрасли дидактики считалось чуть ли не признакомъ наилучшаго тона. Тотъ неожиданный приливъ членовъ этого Съѣзда, котораго свидѣтелями мы являемся въ настоящую минуту, доказываетъ, что методика математики существуетъ, что ея вопросы интересуютъ преподавателей математики въ средней школѣ и что пренебрежительное къ ней отношеніе должно отойти въ область исторіи. Привѣтствую Васъ и въ лицѣ вашемъ—въ высшей степени отрадный фактъ—интересъ стоящихъ у дѣла математическаго образованія къ методикѣ математики».

Послѣ этого заявленія почетнымъ предсѣдателемъ было предоставлено слово для вѣбочереднаго заявленія С. И. Шохоръ-Троцкому.

С. И. Шохоръ-Троцкий (Сиб.). «Въ ночь съ 22 на 23 сего декабря мѣсяца, послѣ тяжелой и неизлѣчимой болѣзни, скончался членъ нашего съѣзда Д. В. Ройтманъ, котораго докладъ въ общемъ собраніи 30 декабря долженъ былъ быть посвященъ вопросамъ систематическаго курса геометріи. Д. В. скончался, не достигнувъ сорокалѣтняго возраста. Его перу принадлежитъ много статей и докладовъ разнообразнаго со-

держанія. Имъ составлены также извѣстные Вамъ книги по геометріи, космографіи и начаткамъ астрономіи. Онъ былъ въ Россіи однимъ изъ самыхъ видныхъ борниковъ коренной реформы преподаванія математики въ школахъ. Кто видѣлъ Д. В. на собраніяхъ, позналъ его лично, тотъ не могъ думать, что этого сильнаго духомъ борца за реформу математическаго образованія такъ скоро не станетъ. Властитель и строго-логическій умъ соединился въ немъ съ основательнымъ философскимъ образованіемъ и какою-то особенною преданностью дѣлу образованія вообще и математическаго въ частности. Это былъ благородный человѣкъ, честный общественный дѣятель, прилежный и добросовѣстный работникъ, превосходный товарищъ и педагогъ Божьею милостью. Тезисы къ докладу своему на нашъ Съѣздъ онъ написалъ уже лежа, можно сказать, на смертномъ своемъ одрѣ, написалъ карандашомъ, на клочкѣ бумаги. Намъ остается съ благодарностью вспомнить о немъ, помнившимъ о насъ тогда, когда уже дни его были сочтены, со скорбью стирать понесенную русскою школою утрату и почтить память покойнаго вставаніемъ».

1. Объ измѣненіи метода обученія въ низшей и средней школахъ.

Докладъ Д. Д. Галакина (Москва).

«Преподаваніе математики въ послѣднее время возбудило много толковъ, главнѣйшей причиною и основнымъ мотивомъ которыхъ было то, что это обученіе отстало отъ общепедагогическихъ идеаловъ, установленныхъ еще Коменскимъ и Песталоцци и блестяще поддержанныхъ и обрисованныхъ работами по экспериментальной психологіи и педагогикѣ. Математика не осталась чужда этому движенію, и мы въ настоящее время пользуемся, напримѣръ, геометрическими моделями, чертежами для вырѣзанія и склеиванія геометрическихъ моделей и т. п. Однако, учебные планы перестали удовлетворять педагоговъ и требуютъ реформы. Но реформа возможна только тогда, когда она будетъ построена на пробныхъ курсахъ, изучая которые

мы имѣемъ возможность нѣсколько подойти къ вопросу съ его внутренней психологической стороны. Одни только пожеланія недостаточны. Лишь конкретный курсъ можетъ дать матеріалъ для сужденій, изъ которыхъ можетъ выясниться планъ будущаго метода обученія.

И различаю два понятія: образованіе и обученіе. Образованіемъ я называю то, что человѣкъ приобретаетъ самъ, лично, путемъ внутренней психологической и логической обработки даннаго жизненнаго опыта, чтенія книгъ и школьнаго обученія. Обученіемъ я называю тотъ процессъ вѣшняго воздѣйствія на психику человѣка, благодаря которому къ своему личному опыту онъ присоединяетъ опытъ другихъ людей, отчасти усваивая его, отчасти запоминая. Въ образованіи центръ тяжести лежитъ въ мышленіи и творествѣ, а въ обученіи—въ памяти и усвоеніи. Согласно этому, наилучшимъ путемъ въ обученіи я считаю тотъ, который даетъ матеріалъ для мышленія и творческихъ повтореній, даетъ матеріалъ для созданія идей, а самыя идеи возникаютъ уже непосредственно въ душѣ ребенка путемъ естественной дѣятельности его психическаго аппарата. Путь для такого построенія курса я вижу въ опытѣ ребенка, въ его конкретныхъ чувственныхъ воспріятіяхъ, которыя уже имъ самимъ перерабатываются въ идеи, а эти идеи сами собою перерабатываются въ логическія понятія и сужденія. Съ этой цѣлью я начинаю обученіе съ непосредственнаго опыта ученика въ измѣреніи длинъ, вѣсовъ, объемовъ и т. и., и думаю, что онъ уже самъ изъ своихъ опытовъ получаетъ идею числа и функциональной зависимости. Отъ числа онъ перейдетъ къ счету и правиламъ производства вычисленій, а отъ функциональной зависимости—къ идее дѣйствій надъ количествомъ. Въ силу этого, я думаю, что такіе отдѣлы геометріи, какъ равенство треугольниковъ, вычисленіе площадей и объемовъ, пэмѣреніе длинъ и угловъ должны войти въ курсъ школьнаго обученія, какъ предѣлительное знаніе первой ступени. Это знаніе не есть абстрактное геометрическое доказательство, а—реальный фактъ, полученный изъ разсмотрѣнія и приготовленія моделей. Ребенокъ, не доказывая равенства треугольниковъ, убѣждается въ немъ, накладывая одинъ вырѣзанный треугольникъ на другой.

Онъ непосредственно убѣждается въ равенствѣ площадей, заполняя площадь фигуры (многоугольника) площадками треугольниковъ и т. п. Изъ такихъ реальныхъ опытовъ онъ изучаетъ свойства плоскихъ фигуръ и ихъ измѣреніе.

Для конкретнаго усвоенія измѣренія площадей я предлагаю особое наглядное пособіе, состоящее изъ листа бумаги, разбитаго дырочками на кв. дюймы или кв. вершки (или, можетъ быть, на кв. сантиметры). Отрѣзывая отъ этого листа площади въ 6, 8, 24 кв. единицы, ученикъ непосредственно сосчитываетъ единицы, а вырѣзывая изъ цвѣтной бумаги равный прямоугольникъ и перегибая его по діагонали, онъ получаетъ понятіе объ измѣренія площадей треугольниковъ и параллелограмовъ. Площади многоугольниковъ и трапецій разбиваются на площади треугольниковъ. Зная лишь вычисленіе площадей прямоугольниковъ, можно вычислить поверхности призмъ и пирамидъ. Аналогично этому идетъ изученіе измѣренія объемовъ прямыхъ и прямоугольных параллелепипедовъ и проч.

Кромѣ геометріи, въ начальномъ курсѣ я предлагаю отвести большое мѣсто физическимъ измѣреніямъ вѣса и объема, пользуясь вѣсами и мензуркой, и думаю, что эти конкретныя воспріятія дадутъ ребенку идею функціональной зависимости и пропорціональности.

Переходя къ среднему образованію по математикѣ, я не могу согласиться съ раздѣленіемъ его на самостоятельные отдѣлы. Математика въ начальномъ обученіи должна быть слита въ одно цѣлое. Ея цѣлью должно быть не изученіе формальныхъ доказательствъ, а изученіе функціональных зависимостей. Въ настоящее время, число получило слишкомъ доминирующее значеніе въ математическомъ образованіи, а количество (именованное число) настолько находится въ тѣни, что объ его свойствахъ говорятъ только въ прикладныхъ наукахъ и въ геометріи, гдѣ оно продолжаетъ оставаться изолированнымъ и совершенно чуждымъ общему міросозерцанію ученика. Но если измѣреніе должно составить основу начального курса обученія, то свойства количествъ должны быть положены въ основу среднеобразовательнаго

курса. Основнымъ понятіемъ этого изученія будетъ понятіе объ отношеніи и о равенствѣ. Рѣшеніе уравненій и пропорціональность должны лежать въ основѣ второго концентра обученія.

Въ извѣстной мнѣ математической литературѣ я нашелъ только двухъ авторовъ, гдѣ идеѣ пропорціональности количествъ отводится подобающее ей мѣсто, это — въ геометріи Руше и Комберуэ и въ «Арифметикѣ» Глаголева. А. Н. Глаголевъ справедливо замѣчаетъ: «свойства чиселъ при извѣстномъ условіи можно примѣнить къ величинамъ: такимъ образомъ числа могутъ служить однимъ изъ средствъ къ изученію величинъ».

При изученіи пропорціональности, по моему мнѣнію, весьма важно выяснить, что пропорціональность количествъ не зависитъ отъ ихъ числового выраженія и есть свойство самихъ количествъ. Для выясненія этого необходимо вновь ввести установленіе пропорціональности, данное Евклидомъ, и доказать по Евклиду теорему о пропорціональности отрезковъ сторонъ угла при пересѣченіи ихъ параллельными линіями. У Евклида нѣтъ этого доказательства, у него берутся отдѣльно начерченные прямые, тогда какъ въ современномъ курсѣ эта теорема доказывается на основаніи числовой величины отношенія. Доказавъ ее по Евклиду, я думаю, что весь вопросъ о пропорціональныхъ линіяхъ ставится внѣ вопроса о числовой величинѣ этихъ линій. Геометрія, такимъ образомъ, позволяетъ дать примѣръ пропорціональности независимо отъ чиселъ и доказать эту пропорціональность. По отношенію къ прочимъ величинамъ мы не имѣемъ такого метода и должны довольствоваться ихъ числовымъ представленіемъ. Вотъ почему мы не имѣемъ права отбрасывать наименованіе при вычисленіи и должны вести учетъ какъ числовымъ операціямъ, такъ и наименованіямъ. При этомъ возникаетъ необходимость не только допустить умноженіе именованнаго числа на именованное, но и дать необходимое объясненіе новымъ количествамъ, полученнымъ, какъ результаты умноженія. Эту точку зрѣнія необходимо провести черезъ весь курсъ, старательно отдѣляя операціи числовыя отъ операцій количественныхъ. Я думаю, что

когда эта точка зрѣнія войдетъ въ жизнь и мы привыкнемъ считать, напр., произведенія ($20 \text{ дней} \times 15 \text{ рабочихъ}$) за величину работы, то многіе вопросы будутъ гораздо проще и яснѣе для учениковъ, и для нихъ измѣренія въ физикѣ и механикѣ перестанутъ быть пугаломъ, какъ это наблюдается въ настоящее время. Введеніе этого вопроса въ курсъ нѣсколько рискованно. Я основываюсь здѣсь, кромѣ личныхъ симпатій, на авторитетѣ Вебера и Вельштейна, но думаю, что именно эта сторона вопроса можетъ затенить болѣе важную идею методической проработки курса начальной алгебры. Лично я не сумѣлъ отказаться отъ введенія новаго метода умноженія, но не увѣренъ въ его безусловной необходимости.

Теперь переходжу къ самой важной части реформы. Въ современномъ курсѣ алгебра оторвана отъ арифметики двумя отдѣлами: курсомъ арабскихъ правилъ, именуемыхъ тройнымъ, процентомъ, товарищества и т. д., и введеніемъ преобразованія формулъ раньше рѣшенія уравненій. Что касается до арабскихъ правилъ, то я увѣренъ, что они доживаютъ послѣдніе дни, что не нынче, такъ завтра они будутъ выброшены изъ официальныхъ программъ курса обученія въ средней школѣ. Если этого не случилось до сихъ поръ, то причина заключается въ томъ, что въ этихъ правилахъ есть и цѣнная сторона: изученіе пропорціональности, вопросъ о дѣленіи на неравные части и вопросъ о процентахъ. Задачи на арабскія правила могутъ быть рѣшаемы при помощи уравненій, причемъ все то цѣнное, что еще держать ихъ въ курсѣ средней школы, сохраняется въ силѣ. Такимъ образомъ, если начинать курсъ алгебры съ уравненій, то можно выбросить отдѣлъ, который справедливо и давно уже считается лишнимъ. Но возможно ли начинать курсъ алгебры съ уравненій безъ познаній въ области алгебраическихъ преобразованій?

Обозначивъ неизвѣстное въ данной арифметической задачѣ буквой и производя надъ этой буквой рядъ указанныхъ въ задачѣ дѣйствій, мы получаемъ уравненіе, какъ общій способъ рѣшенія арифметическихъ задачъ. Этотъ способъ можно связать съ арифметикой самымъ разнообразнымъ манеромъ.

Рѣшеніе задачъ на арабскія правила при помощи уравне-

ний даетъ ученику идею количества и въ связи съ этимъ идею функциональной зависимости, которую необходимо иллюстрировать рядомъ примѣровъ на миллиметровой бумагѣ. При построении графиковъ ученикъ усвоить двѣ идеи: 1) изображеніе количества можетъ быть двоякое: или въ видѣ числа, или въ видѣ отрезка прямой; 2) откладывая количества и строя кривую ихъ зависимости, учащійся наглядно видитъ направленіе количествъ, о чемъ и особо идетъ рѣчь при ознакомленіи учащихся съ отрицательнымъ числомъ.

Построеніе функциональной зависимости позволяетъ мнѣ указать на ея простѣйшее выраженіе прямой линіей, связавъ эту прямую съ уравненіемъ. Тогда становится простымъ и нагляднымъ сложное алгебраическое доказательство, что всякое уравненіе 1-ой степени имѣетъ корень и только одинъ.

Познакомившись съ количествами и ихъ функциональной зависимостью, я перехожу къ подробному изученію простѣйшей изъ нихъ, къ пропорціональной зависимости. Я думаю, что соединеніе ученія о пропорціональности и ученія о подобіи треугольниковъ въ одно цѣлое выгодно для того и другого. Для перваго оно даетъ конкретный примѣръ, а для втораго — числовое обоснованіе. Мнѣ кажется, что вся трудность ученія о подобіи фигуръ въ 5-омъ классѣ является слѣдствіемъ его оторванности отъ изученія свойствъ пропорціи.

Изучивъ такимъ образомъ не только числовыя, но и количественныя пропорціи, я перехожу къ изученію пропорціональныхъ количествъ. Здѣсь особое значеніе приобретаетъ понятіе коэффициента пропорціональности, который существенно отличается отъ того коэффициента, который дается въ современномъ алгебраическомъ курсѣ. Смыслу думать, что понятіе о коэффициентѣ, какъ о коэффициентѣ пропорціональности, важнѣе обычнаго.

Заключивъ этимъ изученіе алгебры въ 3-мъ классѣ, я перехожу въ слѣдующемъ классѣ къ уравненіямъ съ 2-мя неизвестными. При этомъ, пользуясь опытомъ предыдущаго, нахожу совершенно возможнымъ представить общія рѣшенія, какъ координаты точки пересѣченія двухъ прямыхъ.

Потомъ непосредственно можно перейти къ изученію рѣ-

шенія уравненій квадратныхъ и приводимыхъ къ квадратнымъ, познакомивъ съ извлеченіемъ квадратнаго корня.

Закончивши рѣшеніе уравненій, можно съ большей обстоятельностью начать второй концентр алгебры, гдѣ всѣ дѣйствія надъ алгебраическими количествами должны быть строго и научно обоснованы. вмѣстѣ съ алгеброй идетъ изученіе геометріи съ подробнымъ доказательствомъ теоремъ, и мнѣ кажется возможнымъ даже излагать какъ Евклидову, такъ и Понкаре-ову геометрію.

Мнѣ кажется, что при такомъ измѣненіи матеріала учебника не только легко воспримутъ курсъ математики, но и усвоятъ его гораздо глубже и гораздо лучше, творя дамытѣйшее на основаніи опыта и конкретныхъ воспріятій. Кто знаетъ, быть можетъ, и типъ ученика, неспособнаго къ изученію математики, сильно измѣнится, если не пропадетъ окончательно».

Т е з и с ы.

1) Обученіе въ низшей школѣ должно быть построено на измѣреніи величинъ. Такое построеніе дѣлаетъ его нагляднымъ, доступнымъ чувственнымъ воспріятіямъ и этимъ приближаетъ къ обученію по другимъ предметамъ.

2) Согласно этому, въ начальный курсъ преподаванія математики должна войти геометрія и простѣйшіе физическіе измѣрительные процессы, и все обученіе сосредоточится не на счетномъ матеріалѣ, а на опытномъ изученіи функціональных соотношеній величинъ.

3) Курсъ обученія въ средней школѣ долженъ непосредственно примыкать къ курсу низшей школы: въ низшей изучается арифметика, въ средней—алгебра.

4) Изученіе алгебры должно быть начато съ рѣшенія уравненій, и въ этомъ изученіи должно быть положено въ основу изученіе функціональной зависимости величинъ при помощи алгебраическихъ формулъ.

5) Умноженіе и дѣленіе слѣдуетъ разсматривать, какъ самостоятельныя дѣйствія, дающія новыя количества. Произведеніе линейнаго есть площадь; произведеніе силы на разстояніе—работа и т. д.

Пренія по докладу Д. Д. Галанина.

А. Р. Кулишѣвъ (Сиб.). „Въ заслушанномъ нами докладѣ имѣется рядъ положеній, еще не проникшихъ въ школу, но заслуживающихъ возможно скорѣйшаго введенія въ школьный обиходъ. Ребенокъ живетъ въ мѣрѣ пространственныхъ образовъ и числовыхъ отношеній. Дать ему возможность изучить эти соотношенія путемъ планомѣрнаго распредѣленія работы—задача школы. Между прочимъ, придется имѣть ввиду выполненіе въ школѣ планомѣрно проведенныхъ измѣреній. Важно также, чтобы ребенокъ неспѣшно изучилъ рядъ числовыхъ соотношеній на конкретномъ матерьялѣ. По словамъ одного изъ новѣйшихъ методологовъ Юнга, мы также пользуемся конкретнымъ. Предоставимъ же ребенку, по крайней мѣрѣ, ту степень удовлетворенія, которая соотвѣтствуетъ его физическому и психическому развитію и которую мы требуемъ для себя самихъ. По вопросу о „тройныхъ правилахъ“, несмотря на то, что въ проведеніи этого курса я значительно отступаю отъ общепринятаго раньше порядка, я разойдусь съ докладчикомъ. Надо откинуть, можетъ быть, названіе тройныхъ правилъ, надо выбирать задачи живыя, интересныя. Но не слѣдуетъ отбрасывать способа приведенія къ единицѣ, этого могущественнаго приема разсужденія, который явится логическимъ элементомъ уже въ курсѣ 3-го класса“.

„Далѣе идетъ рѣшеніе тѣхъ же задачъ при помощи пропорцій—орудія болѣе тонкаго. Онѣ, какъ справедливо было указано, могутъ служить переходомъ къ уравненіямъ. И, наконецъ, мы приходимъ къ отношеніямъ. Какъ дать учащемуся почувствовать возможность могущества этого орудія—зависитъ отъ искусства преподавателя. Наконецъ, коснусь вопроса объ умноженіи и дѣленіи именованныхъ чиселъ на именованныя. Изучать эти операціи возможно, но съ большими предосторожностями“.

В. М. Кузнецкій (Елисаветградъ). „Не отвергая пользы измѣреній, я считаю все же необходимымъ на первыхъ порахъ знакомить дѣтей съ числомъ путемъ счета предметовъ, рѣшая съ ними простыя задачи, близкія къ ихъ жизни. Когда дѣти считаютъ: двѣ тетради и три тетради, два яблока и три яблока, двѣ коп. и три коп. и т. п., то у нихъ, непремѣнно возникаетъ понятіе о томъ, что 2 да 3—пять. Опасаюсь, что первый тезисъ можетъ ввести учителя въ заблужденіе. Слишкомъ часто изъ-за новаго опускаютъ важное старое. Правъ докладчикъ, утверждая, что мы въ школѣ должны образовывать, а не обучать. Для этого надо дѣтямъ объяснять новое не сразу, а постепенно, маленькими до-

зами, на каждомъ урокъ выводѣ неизвѣстное изъ извѣстнаго. Тогда у дѣтей новыя понятія вырастутъ эволюціоннымъ путемъ и это будетъ образованіемъ“.

В. Р. Мрочекъ (Спб.). „Здѣсь былъ затронутъ вопросъ о тройныхъ правилахъ и о пресловутомъ приведеніи къ единицѣ. Кругъ примѣненія тройнаго правила весьма ограниченъ; въ него не входятъ: пропорціональность второго и высшихъ порядковъ, случаи „дробныхъ единицъ“ (рабочіе, животныя и пр.) и др. Въ остальныхъ-же случаяхъ, уже весьма немногочисленныхъ, очень часто приходятъ къ абсурдамъ. Это достаточно выяснено Шарлемъ Лезаномъ въ его послѣднемъ сочиненіи. Я могу резюмировать свой взглядъ въ такихъ словахъ: методъ, имѣющій столь малый кругъ примѣненій и даже въ этомъ кругѣ приводящій къ частымъ логическимъ абсурдамъ—скверный методъ“

А. Г. Пичушинъ (Красноуфимскъ). „Къ тезису второму („все обученіе сосредоточится не на счетномъ матеріалѣ, а“) дѣлаю слѣдующее замѣчаніе. Я считаю счетъ, притомъ устный, важнымъ какъ въ низшей, такъ и въ средней школѣ, а также въ жизни. По поводу тезиса третьяго („Въ низшей изучается ариѳметика, въ средней—алгебра“) скажу: такого дѣленія я предполагаю не дѣлать; лучше слить ариѳметику съ алгеброй. Конечъ ариѳметики есть обобщеніе, въ алгебраической формѣ, дѣйствій ариѳметики. Пропорціи ариѳметики надо отнести къ алгебрѣ въ связи съ пропорціональными линіями въ геометріи. Такимъ образомъ послѣднія послужатъ иллюстраціей къ первымъ. Обобщеніе ариѳметики есть начало алгебры. Засимъ должно итти понятіе о координатахъ и о графикахъ, которыми сопровождается рѣшеніе уравненій“.

И. С. Лунаковъ (Одесса). „Не отрицая цѣнности лабораторнаго и экспериментальнаго методовъ изученія пропорціональности величинъ, я нахожу, что этотъ методъ имѣетъ одну опасную сторону. Именно: если ученикъ произведетъ измѣреніе съ достаточной тщательностью, то результаты окажутся не пропорціональными. Пропорціональность можетъ быть обнаружена лишь въ случаѣ грубыхъ методовъ измѣренія, (какъ, напр., была открыта обратная пропорціональность между объемомъ газа и давленіемъ). Если же ученикъ, произведя тщательныя измѣренія, получить числа не пропорціональныя и обратится съ недоумѣніемъ къ учителю, то придется отвѣтить, что онъ ошибся и, что результаты должны быть пропорціональны, т. е. сослаться на существующую въ нашемъ умѣ (a priori) идею пропорціональности измѣряемыхъ величинъ. Такимъ образомъ лабораторныя измѣренія служатъ не для открытія закона пропорціональности, даже не для его провѣрки, а лишь для его иллюстраціи“.

В. И. Дубравинъ (Псковъ). „Нельзя согласиться съ докладчикомъ, будто изученіе алгебры должно начинаться съ рѣшенія уравненій. Прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію уравненія, необходимо приучить учениковъ пользоваться буквами и производить надъ ними простѣйшія вычисленія. Алгебраическія свѣдѣнія должны сообщаться постепенно и чередоваться съ числовыми примѣрами. Тогда ученики, незамѣтно для самихъ себя, вполне освоятся съ употребленіемъ буквъ для обозначенія количествъ и перестанутъ смотрѣть на букву, какъ на нѣчто непонятное и имъ недоступное. Давая, напр., понятіе о многочленѣ, можно его, съ внѣшней стороны, сопоставить съ многозначнымъ числомъ. Алгебраическія свѣдѣнія, предлагаемыя въ видѣ обобщенія, оживляютъ учениковъ и будятъ интересъ къ работѣ. Чтобы отмѣтить аналогію между многочленомъ и десятичнымъ числомъ, цѣлесообразно приучать учениковъ, при умноженіи многозначныхъ чиселъ, начинать дѣйствіе умноженія съ высшихъ разрядовъ множителя. Изученію рѣшенія ур—ій должно предпослать усвоеніе учащимися пропорціональности величинъ. Что касается рѣшенія задачъ на тройное правило путемъ приведенія къ единицѣ, которое отстаивалъ одинъ изъ ораторовъ, то можно сказать, что этотъ способъ длиненъ и годится только для одного случая. Лучше отнести это правило къ рѣшенію вопроса о прямой и обратной пропорціональности. Слѣдуетъ приучить учениковъ къ тому, чтобы они выражали зависимость между пропорціональными величинами формулой, каковой и пользовались бы при рѣшеніи задачъ“.

А. В. Соболевъ (Рязань) возражаетъ и вооружается противъ самой возможности умноженія одного именованнаго числа на другое и иллюстрируетъ свой взглядъ на вопросахъ объ измѣреніи работы силы, о законѣ Бойля-Маріотта и т. п. Онъ указываетъ на то, что въ этихъ случаяхъ мы дѣйствія производили только надъ отвлеченными числами, а не надъ величинами. Равнымъ образомъ онъ рѣшительно отказывается говорить о раздѣленіи одного именованнаго числа на другое именованное же число, выраженное въ единицахъ другого рода. Оппонентъ указываетъ также на то, что докладчикъ какъ бы не считаетъ пропорцію равенство отношенія двухъ извѣстныхъ чиселъ отношенію другихъ двухъ извѣстныхъ чиселъ, а говоритъ о пропорціи только какъ объ уравненіи.

С. И. Шохоръ-Троцкий (Спб.). „Въ основѣ только-что сдѣланнаго замѣчанія лежитъ явное недоразумѣніе. Въ наукѣ (въ механикѣ и физикѣ) и въ Technikѣ произведенія двухъ и болѣе именованныхъ чиселъ получили права полного гражданства. Гельмгольцъ и оба брата Лоджа и всѣ современные физики не задумываются

надъ свободнымъ употребленіемъ подобныхъ произведеній и частныхъ. Все дѣло и весь вопросъ только въ томъ, что́ это *значить* помножить длину на длину, площадь на длину, вѣсь на длину, что́ это значить—раздѣлить длину на промежутокъ времени и т. п. Все дѣло въ цѣлесообразномъ опредѣленіи, и если то или другое изъ двухъ дѣйствій полезно, то надо только установить его смыслъ, и тогда никакой опасности для образованія, для логики и для науки не предвидится. Долженъ, однако, отмѣтить, что это—вопросъ, выходящій за предѣлы задачъ нашей секціи, въ которой должны бы обсуждаться вопросы методовъ и пріемовъ обученія, а не вопросъ о дозволительности или недозволительности тѣхъ или иныхъ, важныхъ, съ научной и логической точки зрѣнія, и уже въ науку установленныхъ опредѣленій“.

А. И. Лещенко (Кіевъ). „Первоначальное понятіе о числѣ создается лишь путемъ счета однородныхъ предметовъ или путемъ созерцанія количества ихъ въ данной группѣ. Измѣреніе же предполагаетъ уже умѣнье сознательно считать и требуетъ порой много времени для производства самого измѣренія. Въ виду этого, измѣреніе ни въ коемъ случаѣ нельзя признать за рациональный пріемъ на первой ступени ознакомленія учащихся съ числомъ. Приходится присоединиться къ мнѣнію тѣхъ, кто путемъ счета (палочекъ, кубиковъ, карандашей, зеренъ и т. под.) получаетъ одно и тоже число. Что касается дѣйствія умноженія, то придется признать безусловно неумѣстнымъ начинать ознакомленіе съ умноженіемъ съ того случая, когда приходится умножать именованное число на именованное. Считаю правильнымъ тотъ пріемъ, который разсматриваетъ сначала умноженіе, какъ способъ, упрощающій нахожденіе суммы равныхъ слагаемыхъ. Мысли докладчика объ измѣненіяхъ въ преподаваніи алгебры опасны въ особенности тѣмъ, что не устанавливають тѣсной связи между арифметикой и алгеброй“.

Пр.-доц *С. О. Шатуновскій* (Одесса) указываетъ на то, что вопросъ объ установленіи или неустановленіи понятія о произведеніи двухъ именованныхъ чиселъ есть вопросъ удобства и цѣлесообразности. Здѣсь нѣтъ императива, заставляющаго или запрещающаго дать то или другое опредѣленіе произведенія двухъ именованныхъ чиселъ. Не только практическія надобности, но часто и теоретическіе интересы побуждаютъ насъ вложить то или другое содержаніе въ терминъ «произведеніе двухъ именованныхъ чиселъ». Въ качествѣ иллюстраціи оппонентъ привелъ такъ наз. «прямую» Гильберта, представляющую собою произведеніе двухъ кончныхъ прямыхъ. Цѣль Гильбертова опредѣленія произведенія двухъ отрѣзковъ—развитіе ученія о подобіи независимо отъ ученія о

безконечно-маломъ. Оппонентъ защищаетъ право перемножать какія угодно величины, лишь бы было дано опредѣленіе этого умноженія и лишь бы оно было цѣлесообразно.

Л. А. Сельскій (Варшава). „Я коснусь только пятого тезиса. Умноженіе и дѣленіе всегда выражаютъ зависимость между величинами, лежащую, такъ сказать, въ самой ихъ природѣ. Напр., можно дѣлить яблоки на кучи, мальчиковъ на классы, массы на объемы, километры на путевые часы; мы выражаемъ распредѣленіе однихъ атрибутовъ предметовъ между другими“.

„Отношеніе величинъ (вида $\frac{M}{N}$) выражаетъ зависимость между ними. Если въ 8 килограммовъ относится къ объему въ 4 куб. децим., то

$$\frac{8 \text{ кгр.}}{4 \text{ куб. дцм.}} = \frac{2 \text{ кгр.}}{1 \text{ куб. дцм.}}$$

Получается крайне наглядная картина взаимоотношенія величинъ. Въ случаѣ же, такъ наз., отвлеченнаго дѣленія мы приходимъ къ странному окончанію процесса:

$$\frac{2 \text{ кгр.}}{1}$$

два килограмма дѣлится на одну часть, что невозможно: на одну часть дѣлить нельзя“.

„Взаимная зависимость величинъ, которая рисуется отношеніемъ величинъ, крайне близка пониманію дѣтей: они постоянно ищутъ дѣлителя—именованнымъ. Докладчикъ предлагаетъ чрезвычайно продуктивный для школы приемъ. Высказанное здѣсь мнѣніе, будто измѣреніями могутъ быть затушеваны чисто числовыя представленія, совершенно невѣрно, такъ какъ измѣренія всегда вслѣдствіе къ созданію множественнаго, т. е. числового представленія“.

Предсѣдатель секціи *С. Н. Шахоръ-Троцкий* въ своемъ резюме доклада Д. Д. Галапина и преній указываетъ, что многіе боятся *увлеченія* измѣреніемъ и что выяснились разногласія по вопросу о возникновеніи понятій счета, числа и измѣренія. Игнорировать измѣреніе столь же невозможно и нецѣлесообразно, какъ строить понятіе о числѣ безъ счета. Безъ счета нѣтъ числа въ полномъ смыслѣ этого послѣдняго слова, но это не исключаетъ чрезвычайной педагогической важности упражненій въ измѣреніи при обученіи арифметикѣ.

II. Начала логики въ курсѣ школьной геометріи.

Докладъ С. А. Псакополитанскаго (Варшавы).

«При разсмотрѣніи новыхъ программъ математики, при чтеніи статей о реформѣ преподаванія математики мнѣ ли разу не приходилось встрѣчаться съ мыслью о необходимости ввести въ программу геометріи, къ качеству пропедевтическаго матеріала, знакомство учениковъ съ элементами логики. Между тѣмъ, по моему крайнему разумію, краткій курсъ логики, курсъ, конечно, наглядный и рассчитанный на полное пониманіе и интересъ со стороны учащихся весьма целесообразенъ и даже необходимъ для успѣшнаго усвоенія математики вообще и началъ дедуктивной геометріи въ особенности. Поэтому, цѣлью настоящаго доклада служить: во 1-хъ, выясненіе необходимости введенія въ программу школьной математики знакомства учениковъ съ началами логики, какъ пропедевтическаго курса къ изученію дедуктивной геометріи и, во 2-хъ, выясненіе характера и содержанія этого курса.

Къ моей радости, первая задача весьма мнѣ облегчена докладами проф. А. В. Васильева и С. А. Богомолова. Что знакомить учениковъ среднихъ классовъ средней школы съ элементами логики целесообразно, въ этомъ едва ли кто нибудь будетъ сомнѣваться. Дѣйствительно, возрастъ ученика IV класса въ смыслѣ умственнаго развитія является критическимъ: къ это время у него формируется способность къ отвѣченному мышленію, является напряженная любознательность и стремленіе сформировать, осмыслить и обосновать свои знанія. Съ этой точки зрѣнія краткій курсъ логики явится не только пропедевтическимъ для изученія дедуктивной геометріи, но и курсомъ, завершающимъ первый циклъ средняго образованія вообще.

Спросите ученика VII класса, почему неправильно опредѣленіе: параллелограмъ есть четырехугольникъ, въ которомъ противоположныя стороны параллельны и діагонали въ точкѣ пересѣченія дѣлятся пополамъ? Въ лучшемъ случаѣ естественная логика подскажетъ ему, что послѣдній признакъ лишній.

Но почему онъ является лишнимъ, гдѣ базисъ этого утверждения—онъ не скажетъ ибо базисомъ служить извѣстное логическое правило, а его то онъ и не знаетъ. Между тѣмъ, почти все среднее образованіе и вообще, и математическое—проходится теперь безъ логического осмысленія.

Необходимость начать логику, какъ пропедевтическаго курса къ изученію дедуктивной геометріи, будетъ еще яснѣе, если мы на минуту представимъ себѣ положеніе учителя и ученика, начинающихъ одинъ—обучать, а другой—обучаться геометріи. Дедуктивная геометрія имѣетъ дѣло съ идеальными понятіями, смыслъ и содержаніе которыхъ учитель обязанъ объяснить ученикамъ. Я спрашиваю, въ силахъ ли учитель сдѣлать это объясненіе, если ученикъ не имѣетъ яснаго и отчетливаго сознанія о томъ, что такое понятіе вообще.

Далѣе, извѣстно, какую важную роль въ дѣлѣ усиленнаго изученія математики имѣютъ точныя и хорошо составленныя опредѣленія. И мы даемъ такія опредѣленія, а ученики ихъ выучиваютъ наизусть.

Выяснивъ ученикамъ геометрическія понятія и подчеркнувъ при этомъ, что геометрическихъ прямыхъ, плоскостей, квадратовъ и т. п. не существуетъ реально, мы начинаемъ фаршировать учениковъ различными теоремами, доказывая ихъ преимущественно дедуктивнымъ путемъ. И отсюда начинается истинная драма и для учениковъ, и для учителя. Во 1-хъ, у всякаго, болѣе или менѣе любознательнаго ученика явится вопросъ о цѣлесообразности геометріи,—вопросъ о томъ, зачѣмъ существуетъ наука, объектомъ которой служить то, что не существуетъ. Однажды ученикъ, помню, при теоремѣ о биссектрисѣ равнобедреннаго треугольника спросилъ меня: зачѣмъ намъ эта теорема, вѣдь равнобедреннаго треугольника все равно не существуетъ? И, признаться, оказался въ непріятномъ положеніи: я долженъ былъ или отцѣлаться какимъ нибудь банальнымъ отвѣтомъ, или объяснить ученику цѣль и значеніе абстрактныхъ наукъ вообще и геометріи въ частности. Первый отвѣтъ, понятно, не достоинъ учителя, второй же предполагаетъ предварительное сообщеніе тѣхъ свѣдѣній, о которыхъ идетъ рѣчь.

Драма заключается и въ томъ, что ученики на первыхъ порахъ никакъ не могутъ осмыслить и понять предлагаемыхъ доказательствъ.

И это вполне понятно. Ученики просто не знаютъ, чего отъ нихъ требуютъ. Они только знаютъ, что нужно что-то говорить, чтобы договориться до излюбленной фразы: «что и требовалось доказать». И дѣло здѣсь не въ томъ, что доказательства сами по себѣ непонятны ученикамъ, а въ томъ, что знакомятся-то они съ доказательствами на матеріалѣ, который очень далекъ отъ міра ихъ постоянныхъ представлений и умственныхъ переживаній. Выводъ напрашивается самъ собой: нужно предварительно на примѣрахъ, доступныхъ ученикамъ, выяснить, что такое доказательство и каковы его виды.

Даже при существовавшіи курсъ наглядной геометріи, по моему мнѣнію, знакомство учениковъ съ элементами логики является далеко не излишнимъ. Въ самомъ дѣлѣ: какова бы ни была программа наглядной геометріи, она всегда останется эмпирической и, слѣдовательно, индуктивной. Она не научитъ учениковъ составленію правильныхъ опредѣленій, не выяснитъ характера абстрактной науки, не дастъ образцовъ анализа и синтеза, такъ что переходъ отъ геометріи наглядной къ дедуктивной безъ связующаго ихъ звена—курса логики, будетъ скачкомъ.

По моему убѣжденію, нормальная программа геометріи въ средней школѣ должна быть такоа: 1) наглядная геометрія; 2) знакомство учениковъ съ элементами логики, какъ введеніе въ дедуктивную геометрію; 3) геометрія дедуктивная.

Программа предлагаемаго мною курса логики слѣдующая:

Сложное представленіе, какъ умственный образъ предмета, возникающій благодаря памяти. —Признаки предмета существенные и случайные. —Простое представленіе. —Понятіе, какъ общее представленіе. —Процессъ образованія понятій. (Замѣчаніе. При выясненіи послѣдняго желательно обратить вниманіе учениковъ на то, что понятіе существуетъ лишь, какъ умственное построеніе, но реальнаго существованія не имѣетъ, т.-е. объяснить, что реально существуетъ вотъ это животное, вотъ этотъ человѣкъ, но нѣтъ реальнаго образа, соответствующаго

словамъ: животное, человекъ, подобно тому, какъ нѣтъ лица, соответствующаго портрету, полученному при помощи составной фотографіи Гальтона).—Дѣленіе понятій на абстрактныя и конкретныя.—Признаки понятій.—Родъ, видъ, выводной и случайный признаки.—Объемъ и содержаніе понятія.—Зависимость между содержаніемъ понятія и его объемомъ.—Опредѣленіе, какъ перечисленіе признаковъ понятія.—Неопредѣленныя или простыя понятія. Способъ составленія опредѣленія.—Требованіе логическаго опредѣленія: соразмѣрность, ясность, положительность, отсутствіе «круга».—Выясненіе и опредѣленіе геометрическихъ понятій.—Геометрическое тѣло, поверхность, линія, точка, прямая, плоскость.—Сужденіе или предположеніе, какъ соединеніе двухъ или нѣсколькихъ понятій или представленій на основаніи увѣренности, что утверждаемая связь соответствуетъ дѣйствительности.—Подлежащее и сказуемое.—Сужденія общія и частныя, утвердительныя и отрицательныя.—Сужденія категорическія, условныя и раздѣлительныя.—Законы мышленія.—Умозаключеніе, какъ способъ изъ двухъ или нѣсколькихъ сужденій выводить новое сужденіе одинаковой достовѣрности съ данными.—Посылки.—Тезисъ.—Непосредственное умозаключеніе.—Силлогизмъ.—Аксиома силлогизма.—Примѣры силлогизма.—Выводъ изъ условныхъ и раздѣлительныхъ сужденій.—Сокращенные силлогизмы.—Индукція, какъ заключеніе отъ частнаго къ общему.—Доказательство.—Виды доказательства: анализъ, синтезъ и доказательство отъ противнаго.—Аксиома.—Теорема.—Составъ и виды теоремъ.—Наука, какъ совокупность знаній о данномъ предметѣ, расположенныхъ по опредѣленному плану для лучшаго ихъ пониманія и усвоенія. Науки конкретныя и абстрактныя.—Ихъ различіе.—Значеніе и цѣль абстрактныхъ наукъ. Цѣль, значеніе и содержаніе геометріи, какъ абстрактной науки.

Изложенный матеріалъ предлагается ученикамъ въ формѣ бесѣды съ цѣлымъ классомъ. Вызываніе учениковъ, отмѣтки и задаваніе уроковъ на-домъ должно быть устранено. Опредѣленія выводятся индуктивнымъ путемъ изъ конкретныхъ примѣровъ, а гдѣ можно — и изъ математики. Заботы учителя должны быть направлены не столько на формальное усвоеніе

бесѣдъ, сколько на ихъ пониманіе, и цѣль бесѣдъ можно считать достигнутой, если ученики будутъ въ состояніи привести правильные примѣры на выясненныя положенія. Матеріалъ рассчитанъ на 8—10 учебныхъ часовъ.

Если разсматривать предложенный курсъ какъ пропедевтический, вводящій въ изученіе геометріи, то при прохожденіи его необходимо обратить вниманіе на два момента: на выясненіе видовъ доказательствъ и на выясненіе смысла и цѣли изученія геометріи, какъ абстрактной науки.

Для ознакомленія учениковъ съ синтезомъ и анализомъ мы разсматривали классическій примѣръ: пусть господинъ M хочетъ доказать, что онъ происходитъ отъ родоначальника A . Извѣстно, что путь отъ родоначальника A къ M въ нисходящей линіи будетъ путь синтеза, а обратный путь отъ M къ A въ восходящей линіи—путь анализа.

На этомъ примѣрѣ ученикъ убѣждался въ особенностяхъ синтеза и анализа.

Для ознакомленія съ доказательствами отъ противнаго брался примѣръ вродѣ слѣдующаго. Въ извѣстномъ городѣ въ извѣстное время совершена кража вещи, о которой знаютъ только три лица A , B , C . Какъ доказать, что кражу совершилъ C ? Для этой же цѣли служили арифметическія задачи, изъ рѣшенія которыхъ ученики могли усмотрѣть выводы аналитическаго метода и значеніе синтетическаго.

Приступая къ выясненію смысла и значенія дедуктивной геометріи, я сравненіемъ наукъ—географіи и исторіи съ науками естествовѣдѣніемъ и арифметикой устанавливаю характеристическую особенность абстрактной науки, какъ науки о томъ, какими долженъ быть предметъ, какъ науки о типахъ, образцахъ и нормахъ, съ которыми сравниваются реальные предметы и ихъ свойства. Затѣмъ примѣрами, взятыми изъ дѣтской жизни, выясняю, какую пользу получаетъ человѣкъ отъ изученія абстрактной науки.

Геометрія—наука абстрактная, а значитъ цѣль и значеніе ея объясняются цѣлью и значеніемъ абстрактныхъ наукъ вообще. Прямой линіи не существуетъ,—это вѣрно, но зато существуетъ много тѣлъ, которые ограничены линіями, очень

похожими на прямыя. Геометрія какъ бы говоритъ изучающему ее: «вотъ тебѣ образцовыя фигуры и ихъ свойства. Смотри, на какую изъ изученныхъ тобою фигуръ болѣе всего похожа та, свойства которой тебя интересуютъ? Если она похожа, напр., на кругъ, то примѣни къ ней свойства круга въ полной увѣренности, что свойства круга къ ней будутъ примѣнимы тѣмъ вѣрнѣе, чѣмъ болѣе на кругъ она похожа.

Послѣ намѣченнаго въ общихъ чертахъ логическаго введенія можно безбоязненно отправиться въ путь изслѣдованія геометрическихъ истинъ, въ полной увѣренности, что немалый трудъ, затраченный преподавателемъ на это введеніе, принесетъ обильные плоды».

III. Методъ обученія математикѣ въ старой и новой школѣ.

Докладъ К. О. Лебединцева (Москва).

(См. «Математическое Образованіе», 1911 г., № 1, и 1912 г., № 2).

Т е з и с ы.

1) Традиціонный абстрактно-дедуктивный методъ обученія математикѣ является недостаточно обоснованнымъ психологически и на практикѣ встрѣчается съ серьезными препятствіями.

2) Поиски новаго метода должны привести не къ конфликту, а къ синтезу научно-математической и педагогической точекъ зрѣнія.

3) Въ учебномъ предметѣ нельзя утверждать чего-либо противорѣчающаго научнымъ даннымъ, нельзя и пользоваться такими способами объясненій, которые содержатъ логическій дефектъ; въ соблюденіи этихъ условій и заключается научность курсовъ, преподаваемыхъ въ средней школѣ.

4) Въ учебномъ предметѣ можно и должно, въ случаѣ надобности, вмѣсто дедуктивнаго доказательства той или иной математической истины заставлять учащихся убѣждаться въ справедливости ея индуктивнымъ путемъ, на цѣлесообразно

подобранныхъ конкретныхъ примѣрахъ; можно и должно, въ подходящихъ случаяхъ, сообщать неполныя опредѣленія, съ тѣмъ, чтобы впослѣдствіи ихъ расширять. Такова педагогическая точка зрѣнія.

5) Методъ преподаванія математики въ теченіе курса средней школы долженъ постепенно видоизмѣняться сообразно развитію логическихъ способностей учащихся, и въ этомъ развитіи можно намѣтитъ три цикла:

6) Первый циклъ соответствуетъ отроческому возрасту учащихся 10—13 л. (когда изучается арифметика, начальныя свѣдѣнія по алгебрѣ и, согласно современнымъ воззрѣніямъ, такъ назыв. конкретная геометрія). На этой ступени усвоеніе новыхъ понятій и истинъ должно идти исключительно конкретно-индуктивнымъ путемъ, съ широкимъ примѣненіемъ такъ назыв. лабораторныхъ приѣмовъ.

7) Второй циклъ соответствуетъ переходному возрасту 13—16 л. (въ которомъ изучается основной курсъ алгебры и такъ назыв. систематическій курсъ геометріи со включеніемъ началъ тригонометріи). На этой, именно, ступени должно начаться развитіе дедуктивныхъ приѣмовъ усвоенія новыхъ истинъ, наряду съ индуктивными, и должны быть, насколько можно, приведены въ логическую связь между собою важнѣйшія истины, изученныя до сихъ поръ чисто эмпирически.

8) Третій циклъ соответствуетъ юношескому возрасту 16—18 л. (когда должны, согласно современнымъ воззрѣніямъ, изучаться основы высшаго анализа и должно идти систематизирующее и обобщающее повтореніе основъ всего курса математики). Здѣсь дедуктивные приѣмы должны получить полное свое развитіе, не вытѣсняя, впрочемъ, конкретно-индуктивнаго метода при изложеніи существенно новыхъ истинъ.

9) На всѣхъ ступеняхъ обученія должно быть обращено вниманіе на установленіе тѣсной связи между различными отдѣлами математики между собою и съ другими науками, а характеръ практическихъ упражненій долженъ быть близокъ къ окружающей дѣйствительности.

Второе засѣданіе

28 декабря 8 час. веч.

Предсѣдательствовалъ П. А. Долгушинъ.

Вопросъ о дробяхъ въ курсѣ ариметики.

(Основныя положенія метода къ курсу дробей).

Докладъ К. Ѳ. Лебединцева (Москва).

«Ученіе о дробяхъ принадлежитъ, какъ извѣстно, къ числу большихъ мѣстъ традиціонной системы преподаванія ариметики. Более сложные отдѣлы курса, какъ, напр., умноженіе и дѣленіе на дробь, обычно съ трудомъ усваиваются учащимися, а такой сравнительно легкій отдѣлъ, какъ дѣйствія надъ десятичными дробями, служитъ постояннымъ источникомъ ошибокъ въ вычисленіяхъ, порою даже въ старшихъ классахъ. Причины этого явленія общеизвѣстны. Съ одной стороны, традиціонный курсъ дробей вообще излагается въ слишкомъ отвѣченной формѣ; съ другой стороны, при прохожденіи его обыкновенно слишкомъ много вниманія удѣляется второстепеннымъ вопросамъ, лишь косвенно связаннымъ съ ученіемъ о дробяхъ и не имѣющимъ серьезнаго практическаго значенія,—напр., вопросу о дѣлности чиселъ или о періодическихъ дробяхъ,—а на пріобрѣтеніе прочныхъ навыковъ въ дѣйствіяхъ надъ дробями, встречающимися въ арифметической практикѣ, остается недостаточно мѣста и времени; объ устномъ же счетѣ надъ простѣйшими дробями или о примѣненіи въ частныхъ случаяхъ болѣе удобныхъ и изящныхъ приѣмовъ вычисленія—школа обыкновенно и не помышляетъ.

Очевидная ненормальность такого положенія заставляетъ поставить вопросъ о томъ, каково же должно быть содержаніе

ученія о дробяхъ въ курсѣ арифметики и какъ должны разрабатываться съ учащимися важнѣйшіе пункты этого ученія. Я и имѣю въ виду дать посильный отвѣтъ на этотъ вопросъ.

Съ этой цѣлью я остановлюсь прежде всего на самомъ спорномъ въ настоящее время пунктѣ методики ученія о дробяхъ—на вопросѣ объ относительномъ порядкѣ изученія дробей, простыхъ и десятичныхъ. Должны ли десятичныя дроби изучаться, какъ частный случай обыкновенныхъ, или предшествовать имъ, подъ исевдонимомъ «десятичныхъ чиселъ» или подъ своимъ настоящимъ именемъ?

Старая школа, какъ извѣстно, рѣшала этотъ вопросъ весьма просто: сперва должны изучаться общія положенія и общіе законы, а затѣмъ тѣ формы, въ которыя они облекаются въ частныхъ случаяхъ; поэтому десятичныя дроби должны идти вслѣдъ за обыкновенными. Нельзя сказать при этомъ, чтобы въ традиціонной практикѣ строго выдерживалась система—разсматривать десятичную дробь, какъ частный случай простой; напр., какъ извѣстно, правило умноженія десятичныхъ дробей чаще всего выводилось при помощи отбрасыванія запятыхъ у сомножителей и примѣненія законовъ объ измѣненіи произведенія, а не какъ частный случай правила умноженія простыхъ дробей. Но, въ общемъ, указанное распределеніе курса вполне отвѣчало абстрактнодедуктивному методу обученія математикѣ, принятому въ старой школѣ.

Въ сочиненіяхъ сторонниковъ реформы*), да и въ практикѣ школъ новаго типа замѣчается опредѣленная тенденція предпосылать изученіе десятичныхъ дробей простымъ и ставить десятичныя дроби въ соотвѣтствіе скорѣе съ цѣлыми числами, чѣмъ съ обыкновенными дробями. Выстѣ съ тѣмъ наблюдается также стремленіе ограничить изученіе простыхъ дробей, даже раздаются голоса, требующіе изыятія курса простыхъ дробей изъ школы.

Въ пользу предварительнаго изученія десятичныхъ дробей приводится обыкновенно то соображеніе, что дѣйствія надъ

*) A. L. Hüfner. Didaktik des mathematischen Unterrichts.

В. Мрончъ и Ф. Фялдиновичъ. Педагогика математики, т. 1.

Ивановъ (Дубравинъ). Курсъ арифметики, вып. 1.

десятичными дробями проще соответственныхъ дѣйствій надъ простыми дробями и что предварительное ознакомленіе съ ними отвѣчаетъ требованіямъ индуктивнаго метода въ обученіи. Кроме того, говорятъ, что правила дѣйствій надъ десятичными дробями аналогичны таковымъ же правиламъ для цѣлыхъ чиселъ, что сами по себѣ десятичныя дроби представляютъ естественное развитіе нумералціи вправо, а потому и целесообразно сопоставлять ихъ именно съ цѣлыми числами, а не съ дробями вообще. Наконецъ, указываютъ, что десятичныя дроби имѣютъ гораздо большее практическое значеніе, чѣмъ простыя, что послѣднія мало или вовсе не встрѣчаются въ практическихъ вычисленіяхъ и что поэтому школа и должна пораньше знакомить учащихся съ десятичными дробями и главное свое вниманіе удѣлять изученію точныхъ и приближенныхъ вычисленій съ ними, а простымъ дробямъ посвящать время лишь постольку, поскольку въ частныхъ случаяхъ они могутъ способствовать сокращенію вычисленій.

При этомъ сторонники предварительнаго изученія десятичныхъ дробей обыкновенно предлагаютъ при прохожденіи дѣйствій надъ ними, въ частности—умноженія и дѣленія на десятичную дробь, не касаться вопроса о сущности этихъ дѣйствій и свѣтаться при отбрасываніи запятой въ множителѣ и дѣлитель на законы измѣненія произведенія и частнаго, установленные для цѣлыхъ чиселъ. Не отрицая логическихъ дефектовъ, допускаемыхъ при такомъ способѣ объясненія*), они готовы мириться съ этими дефектами въ виду незамѣтности послѣднихъ для учащихся и ради тѣхъ внѣшнихъ удобствъ, которыя происходятъ изъ принятаго ими расположенія курса. Однимъ словомъ, какъ имъ кажется, они отдають предпочтеніе дидактическимъ и педагогическимъ соображеніямъ передъ чисто-логическими.

Я полагаю, однако, что отрицательныя стороны такой постановки вопроса болѣе серьезны, чѣмъ это кажется на первый взглядъ. Уже то обстоятельство, что учащіеся будутъ употреблять хорошо знакомый имъ терминъ «умножить» въ при-

*) См., напр., вышеупомянутое сочиненіе Пибера, стр. 82.

ложеніи къ такимъ случаямъ, когда этотъ терминъ будетъ имѣть уже нѣсколько иной смыслъ, и притомъ этотъ новый смыслъ не будетъ имъ выясненъ,—уже это одно обстоятельство нужно считать неприемлемымъ съ педагогической точки зрѣнія. А сверхъ того, если мы, умножая какое-либо число, хотя-бы на 0,3, говоримъ, что при отбрасываніи занятой во множителѣ искомое произведеніе увеличивается въ 10 разъ, то мы, не имѣя логическаго права распространять на сферу дробныхъ чиселъ тотъ законъ, который установленъ нами пока лишь для цѣлыхъ чиселъ, вводимъ въ скрытомъ видѣ опредѣленіе смысла умноженія на 0,3, то самое опредѣленіе, котораго хотѣли избѣжать. Мы, въ сущности, говоримъ: «подъ произведеніемъ даннаго множимаго на 0,3 мы будемъ разумѣть такое число, которое въ 10 разъ меньше произведенія того же множимаго на 3», только этому новому опредѣленію мы придаемъ такую форму, которая имѣетъ виѣшній видъ логическаго доказательства. А такой приѣмъ, какъ извѣстно, стоитъ въ коренномъ противорѣчіи съ требованіями современной дидактики. А если еще принять въ соображеніе, что чисто виѣшнее изученіе правилъ умноженія и дѣленія на десятичную дробь не можетъ обезпечить должной увѣренности при производствѣ учащимися этихъ дѣйствій въ задачахъ, то придется въ концѣ концовъ признать, что ни логическія, ни педагогическія соображенія не оправдываютъ такого способа прохожденія курса «десятичныхъ чиселъ», который обыкновенно предлагается.

Можно было бы признать непротиворѣчающимъ дидактическимъ требованіемъ только такое предварительное прохожденіе курса десятичныхъ дробей, при которомъ смыслъ дѣйствій надъ ними не замалчивался бы, и умноженіе на дробь опредѣлялось бы хотя бы, какъ повтореніе слагаемымъ нѣкоторой десятичной доли множимаго. Было бы даже вполне возможно установить подобное опредѣленіе на подходящихъ задачахъ и вообще провести разработку его съ учащимися въ духѣ конкретно-индуктивнаго метода. Подобнымъ же образомъ можно было бы поступить и при изученіи дѣленія на десятичную дробь. Такое построеніе курса было бы, съ моей точки зрѣнія, допустимо; но оно вызвало бы возраженія уже со стороны цѣлесообраз-

ности. Въ самомъ дѣлѣ, этотъ распорядокъ только переносить въ курсъ десятичныхъ дробей всѣ трудности ознакомленія съ понятіемъ объ умноженіи и дѣленіи на дробь; а съ другой стороны, при немъ не только выдерживается переходъ отъ болѣе простаго къ болѣе сложному, такъ какъ въ курсѣ обыкновенныхъ дробей, оставляемомъ на послѣдокъ, безспорно есть вопросы, дидактически болѣе простые, чѣмъ умноженіе и дѣленіе на десятичную дробь. При этомъ надо замѣтить, что и всѣ остальные соображенія, которыя обычно приводятся въ пользу изученія курса десятичныхъ дробей передъ простыми, еще не обуславливаютъ собою именно такого порядка изученія: если знакомство съ десятичными дробями крайне важно для практики, то отсюда вытекаетъ, что ихъ нужно хорошо изучать въ школѣ, но еще тѣмъ самымъ не доказано, что ихъ нужно изучать передъ простыми дробями.

Слѣдуетъ ли изъ всего предыдущаго, что я высказывалось на традиціонный порядокъ изученія курса: сперва простыя дроби, а затѣмъ десятичныя, какъ ихъ частный случай? Нисколько. Я полагаю, что наиболѣе цѣлесообразно будетъ распределить весь курсъ дробей, простыхъ и десятичныхъ, на циклы, въ каждый изъ которыхъ входили бы вопросы приблизительно одинаковой дидактической трудности; подобная идея практиковалась и до сихъ поръ въ формѣ такъ назыв. пропедевтическаго курса дробей, но исключительно по отношенію къ простымъ дробямъ; я предложилъ бы распространить ту же точку зрѣнія и на десятичныя дроби.

Первый изъ этихъ цикловъ долженъ быть посвященъ конкретному ознакомленію съ простѣйшими, наиболѣе употребительными долями и дробями, выполняемому при помощи дѣйствительныхъ измѣреній и дѣленія предметовъ на части. Здѣсь слѣдуетъ имѣть въ виду экспериментальныя изслѣдованія Вальземанна^{*)}, который, между прочимъ, занимался вопросомъ о наиболѣе цѣлесообразныхъ наглядныхъ пособіяхъ при первоначальномъ ознакомленіи съ дробями. Онъ нашелъ, что наиболѣе ясныя и отчетливыя представленія о доляхъ и дробяхъ

^{*)} Dr. Hermann Walsemann, Anschauungslehre der Rechenkunst, Schleswig 1907.

получаются при употребленіи квадратныхъ таблицъ, разграфлен-
ныхъ на прямоугольныя или квадратныя клітки, а не при
помощи круга, раздѣленнаго на секторы, или прямой, раздѣлен-
ной на равныя отрезки.

Цѣлью изученія этого перваго цикла являются твердое
знаніе кратныхъ соотношеній между простѣйшими долями и
умѣніе выполнять надъ ними счетъ и дѣйствія, преимуще-
ственно устно. Какія доли считать простѣйшими и важнѣй-
шими—это вопросъ довольно спорный, но я полагаю, что здѣсь
цѣльзя ограничиваться 2-ми, 3-ми, 10-ми долями, а
необходимо разсматривать и 12-ую, и 24-ую, и 40-ую, и 100-ую,
и вообще разныя доли со знаменателями въ предѣлахъ первой
сотни, находящіяся въ несложныхъ кратныхъ соотношеніяхъ
съ вышеуказанными. Дѣло въ томъ, что основательное зна-
комство съ этими долями и составляемыми изъ нихъ дробями
не бесполезно для практическихъ вычисленій и отнюдь не мо-
жетъ быть замѣнено изученіемъ десятичныхъ дробей, какъ это
иногда предлагаютъ.

Само собой разумѣется, что въ этомъ циклѣ всѣ дѣйствія
совершаются по соображенію и учащимся не сообщаются какія-
либо правила и опредѣленія; достаточно ограничиться объясне-
ніемъ смысла важнѣйшихъ терминовъ (числитель, знаменатель,
дробь правильная и неправильная и т. д.). Но задачи, кото-
рыя рѣшаются въ этомъ отдѣлѣ, должны быть по возможно-
сти разнообразнѣе и могутъ касаться любого дѣйствія надъ
дробями, если только послѣднія разсматриваются, какъ собра-
нія конкретныхъ долей цѣлаго; такъ что, напр., вопросъ о томъ,
сколько разъ $\frac{1}{12}$ доля содержится въ $\frac{2}{3}$, можетъ быть съ успѣ-
хомъ разбираемъ на этой ступени.

Въ общемъ, первый циклъ можетъ обнимать собою слѣ-
дующіе вопросы: первоначальное понятіе о дроби, какъ сово-
купности конкретныхъ долей цѣлаго; изображеніе и чтеніе
дробныхъ чиселъ; смыслъ числителя и знаменателя; понятіе о
правильной и неправильной дроби; обращеніе неправильной
дроби въ смѣшанное число и наоборотъ; раздробленіе болѣе
крупныхъ долей въ болѣе мелкія и обратный вопросъ; сложе-

ніе и вычитаніе дробей съ одинаковыми, а затѣмъ и съ разными знаменателями; умноженіе и дѣленіе дроби на цѣлое число помощью соответственныхъ дѣйствій надъ числителемъ; опредѣленіе кратныхъ соотношеній между дробными числами, въ тѣхъ случаяхъ, когда искомое частное—цѣлое; нахожденіе данной части отъ цѣлаго числа; нахожденіе нѣкотораго числа по данной его части, въ томъ случаѣ, когда эта часть некомпато выражена цѣлымъ числомъ (причемъ каждый изъ послѣднихъ двухъ вопросовъ рѣшается двумя дѣйствіями съ помощью умноженія и дѣленія на цѣлое число).

Какъ видно, этотъ первый циклъ по содержанію сходенъ съ практикующимъ у насъ пропедевтическимъ курсомъ дробей, но въ отличіе отъ традиціонной практики я подчеркиваю необходимость возможно большей конкретности при его прохожденіи. Только при этомъ условіи можно добиться того, чтобы учащіеся освоились со счетомъ простѣйшихъ дробныхъ чиселъ хотя бы въ такой мѣрѣ, въ какой они усваиваютъ дѣйствія надъ цѣлыми числами въ предѣлахъ первой сотни.

Изученіе перваго цикла дробей можетъ найти себѣ мѣсто, какъ и теперь, въ концѣ курса перваго класса средней школы (т. е. на 11-мъ году жизни учащихся). Возможно, конечно, выдѣлить изъ него еще болѣе узкій концентръ, именно знакомство съ дробями, знаменатели которыхъ не превышаютъ 10 или 12, и изучать этотъ концентръ въ еще болѣе раннюю пору обученія (въ подготовительномъ классѣ средней школы); но представляетъ ли такой распорядокъ значительныя преимущества—этотъ вопросъ можетъ рѣшить только практическій опытъ.

Второй циклъ (съ котораго, по моему мнѣнію, можетъ начинаться курсъ втораго класса) долженъ быть посвященъ ознакомленію съ десятичными дробями (преимущественно десятиы, сотыя, тысячныя доли) и рѣшенію при помощи ихъ всѣхъ подходящихъ вопросовъ, но безъ введенія понятія объ умноженіи и дѣленіи на дробь. Первоначальное знакомство съ десятичными дробями должно, конечно, сопровождаться конкретными иллюстраціями, для чего хорошіе матеріалъ даютъ метрическая система и подраздѣленія рубля. Затѣмъ (сохраняя

все время представлѣніе о дробѣ, какъ собраніи конкретныхъ долей цѣлаго) можно послѣдовательно изучить соотношенія между десятичнымъ долями различныхъ разрядовъ, выяснитъ тѣсную связь ихъ съ нумераціей цѣлыхъ чиселъ и научить учащихся быстрому обращенію болѣе крупныхъ разрядныхъ единицъ въ болѣе мелкія, и наоборотъ. Послѣ этого учащіеся легко приобретутъ привычку смотрѣть на десятичную дробь, какъ на совокупность долей различныхъ разрядовъ, расположенныхъ по десятичной системѣ, и безъ труда смогутъ изучить и прилагать въ задачахъ сложеніе и вычитаніе десятичныхъ дробей и умноженіе десятичной дроби на цѣлое число. Что же касается дѣленія, то, разумѣется, сперва слѣдуетъ задавать только такія задачи, въ которыхъ частное отъ дѣленія десятичной дроби на цѣлое число выражалось бы конечной десятичной дробью, а также такія, въ которыхъ приходилось бы рѣшать, сколько разъ данный десятичная дробь содержится въ другой или въ цѣломъ числѣ, причемъ искомое частное было бы цѣлымъ. Затѣмъ, конечно, можно разбирать и случаи приближеннаго дѣленія десятичной дроби на цѣлое число (аналогично дѣленію съ остаткомъ въ курсѣ цѣлыхъ чиселъ); въ связи съ этимъ слѣдуетъ разобрать, на несложныхъ примѣрахъ, и вопросъ относительно обращенія простой дроби въ десятичную путемъ дѣленія числителя на знаменателя; но, разумѣется, относительно случаевъ необратимости простой дроби въ конечную десятичную достаточно ограничиться констатированіемъ, на примѣрахъ, факта безконечнаго дѣленія и не слѣдуетъ даже подымать вопроса о періодическихъ дробяхъ.

Въ этомъ же циклѣ слѣдуетъ рѣшать и вопросы, касающіеся нахожденія той или иной десятичной части отъ цѣлаго числа и наоборотъ, но безъ введенія понятія объ умноженіи и дѣленіи на дробь двумя дѣйствіями, совершаемыми при цѣломъ множителѣ или дѣлителѣ.

Необходимо добавить, что сюда же должно войти и ученіе о процентѣ, какъ сотой долѣ даннаго числа, и должны рѣшаться разнаго рода задачи на процентныя вычисленія, не требующія производства умноженія или дѣленія на дробь.

Наконецъ, третій циклъ (приходящійся также на курсъ

второго класса) посвящается такъ назыв. систематическому курсу дробей, простыхъ и десятичныхъ, изучаемыхъ параллельно, причемъ десятичныя дроби рассматриваются уже какъ частный случай простыхъ. Я называю этотъ курсъ систематическимъ не потому, чтобы въ немъ могла изучаться какая-либо формальная теорія дробей, а потому, что въ немъ должны быть приведены въ систему тѣ свѣдѣнія о дробяхъ, съ которыми учащіеся доселѣ познакомились. Въ этомъ курсѣ прежде всего придется остановиться на измѣненіи величины дроби при измѣненіи ея числителя и знаменателя, на неизмѣняемости этой величины при увеличеніи или уменьшеніи числителя и знаменателя въ одинаковое число разъ, и на преобразованіяхъ, основанныхъ на этомъ послѣднемъ законѣ—на сокращеніи дробей и приведеніи ихъ къ одному знаменателю. Такъ какъ само собою разумѣется, что въ задачи на этотъ курсъ должны входить дроби съ не особенно большими знаменателями, то можно предложить сдѣлать въ немъ довольно значительныя сокращенія сравнительно съ традиціонной программой, именно можно безусловно упразднить ученіе объ отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя, такъ какъ сокращеніе дробей, дѣйствительно употребляемыхъ на практикѣ, всегда выполняется путемъ отысканія «на-глазъ» общихъ множителей числителя и знаменателя. Что же касается отысканія наименьшаго кратнаго, выполняемаго для приведенія дробей къ одному знаменателю, то оно производится на практикѣ почти всегда на основаніи сохраненныхъ памятью учащихся важнѣйшихъ кратныхъ соотношеній между числами первой сотни, а не путемъ примѣненія общихъ правилъ; поэтому я считаю вѣроятнымъ, что въ курсѣ младшихъ классовъ, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь, можно обойтись и безъ ученія о наименьшемъ кратномъ, а въ связи съ вышеизложеннымъ опустить и вообще ученіе о дѣлимости чиселъ, за исключеніемъ самыхъ терминовъ: «общій дѣлитель», «общее кратное», «общее наименьшее кратное» и т. д., которые полезны для сокращенія рѣчи и потому должны быть пояснены и употребляемы. Изученіе же теорій дѣлимости чиселъ, общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго

слѣдовало бы отнести къ курсу теоретической арифметики, которому мѣсто въ послѣднемъ классѣ средней школы.

Изученіе, или вѣрнѣе, повтореніе сложенія и вычитанія дробныхъ чиселъ не представитъ никакихъ затрудненій. Не мѣшаетъ обратить вниманіе учащихся на то, что при сложеніи и вычитаніи обыкновенныхъ дробей приведеніе къ одному знаменателю обязательно, а при соответствующихъ дѣйствіяхъ надъ десятичными дробями—не обязательно.

Наконецъ, мы должны будемъ подойти къ кульминационному пункту всего курса—къ ученію объ умноженіи и дѣленіи на дробь.

Старая школа, какъ извѣстно, выводила правило умноженія на дробь при помощи общаго опредѣленія этого дѣйствія: «умножить значитъ составить изъ множимаго новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы». Опредѣленіе это сообщалось обыкновенно догматически, съ разъясненіемъ на частномъ примѣрѣ того обстоятельства, что оно охватываетъ собою и случай умноженія на цѣлое число, а затѣмъ предлагалось разсужденіе вродѣ слѣдующаго: «умножить 5 на $\frac{3}{4}$ значитъ, согласно опредѣленію, составить изъ 5 новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы; но множитель $\frac{3}{4}$ составленъ изъ единицы такъ: взята единица, раздѣлена на 4 равныхъ части, и такихъ частей взято 3; поэтому для полученія искомаго произведенія мы должны раздѣлить число 5 на 4 равныхъ части и полученное число $\frac{5}{4}$ взять (слагаясь) 3 раза; будемъ имѣть $\frac{15}{4}$ ». Послѣ этого путемъ сравненія полученнаго числа съ данными выводилось и самое правило умноженія на дробь.

Общезвѣстны и тѣ серьезные дефекты, которыми страдаетъ этотъ традиціонный пріемъ объясненія вопроса.

Во-первыхъ, онъ не вполне удовлетворителенъ съ логической стороны, такъ какъ способъ составленія числа изъ единицы, подразумеваемый въ немъ, является не единственнымъ, и мы можемъ, нисколько не нарушая буквы опредѣленія, разсуждать слѣдующимъ образомъ: «число $\frac{3}{4}$ составлено изъ еди-

ницы такъ: «взятъ единица 3 раза слагаемымъ, затѣмъ 4 раза слагаемымъ, и первое изъ полученныхъ чиселъ сдѣлано числителемъ дроби, второе—ея знаменателемъ»; составляя же по этому «способу» новое число изъ множимаго 5, мы получимъ дробь $\frac{15}{20}$, а не $\frac{15}{4}$, какъ слѣдовало бы. Чтобы избѣжать этого парадокса, пришлось бы здѣсь (и въ другихъ аналогичныхъ случаяхъ) предварительно строго оговаривать, о какомъ именно способѣ составленія числа изъ единицы идетъ рѣчь, и благодаря этому, все объясненіе становится искусственнымъ и теряетъ свою убѣдительность. Во-вторыхъ, съ дидактической точки зрѣнія данное объясненіе страдаетъ излишней общностью, такъ какъ на этой ступени курса требуется выяснитъ только смыслъ умноженія на дробь, а не умноженія вообще. Въ третьихъ, съ педагогической стороны надо считать догматическое сообщеніе опредѣленій въ такой же мѣрѣ недопустимымъ, какъ и догматическое заучиваніе правилъ.

Неудовлетворительность традиціоннаго приѣма заставляетъ искать новыхъ путей, и мы видимъ, что въ настоящее время предлагаются двѣ точки зрѣнія. Одни *) воскрешаютъ старинный приѣмъ вывода правила умноженія на дробь при помощи законовъ измѣненія произведенія, установленныхъ для цѣлыхъ чиселъ, и предлагаютъ разсуждать примѣрно такъ: «вмѣсто умноженія 5 на $\frac{3}{4}$ будемъ множить 5 на 3; получимъ 15. Но отбросивъ знаменателя во множителѣ, мы увеличимъ его въ 4 раза; слѣд., и произведеніе увеличилось въ 4 раза противъ истиннаго; чтобы его исправить, уменьшаемъ найденное число 15 въ 4 раза, и получаемъ $\frac{15}{4}$ ». Этотъ приѣмъ дѣйствительно легче традиціоннаго для запоминанія, но по существу онъ неприемлемъ по тѣмъ же причинамъ, какъ и разсмотрѣнное выше объясненіе умноженія на десятичную дробь: смыслъ умноженія на дробь остается невыясненнымъ для учащихся, а приведенное разсужденіе содержитъ замаскированное опредѣленіе дѣйствія, такъ какъ мы не имѣемъ логическаго права ссылаться

*) А. В. Сахаровъ. Арифметика. Опытъ методическаго изложенія предмета. Спб. 1910 г.

здѣсь на законы измѣненія произведенія, установленные пока лишь для цѣлыхъ чиселъ, и, въ сущности говоря, вводимъ условіе считать произведеніемъ 5 на $\frac{3}{4}$ такое число, которое было бы въ 4 раза меньше произведенія 5 на 3. Поэтому, какъ было выяснено выше, данный приемъ стоитъ въ коренномъ противорѣчій съ однимъ изъ существенныхъ требованій современной дидактики: не пытаться симулировать доказательствъ тамъ, гдѣ нужно вводить новыя опредѣленія или условія.

Другіе авторы *) и педагоги предлагаютъ вмѣсто традиціоннаго объясненія просто вводить условія прокъ слѣдующаго: «подъ произведеніемъ двухъ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ мы будемъ разумѣть дробь $\frac{ab}{cd}$ » (числителемъ которой является произведение числителей данныхъ дробей, а знаменателемъ—произведение знаменателей),—и сопровождать эти условія подходящей графической иллюстраціей. Такой приемъ не грѣшитъ уже противъ логики, такъ какъ опредѣленіе произведенія вводится въ правильной и явной формѣ; но съ педагогической точки зрѣнія онъ столь же неудовлетворителенъ, какъ и прежніе, такъ какъ цѣль установленія указанныхъ здѣсь условій остается совершенно неясной для учащихся. Взрослый человѣкъ, который изучаетъ арифметику въ научномъ изложеніи, можетъ сознавать, что подобныя условія вводятся ради сохраненія основныхъ законовъ арифметическихъ дѣйствій при расширеніи понятій о числѣ, но учащемуся младшаго возраста такая точка зрѣнія совершенно недоступна, и онъ восприметъ сообщенное ему условіе просто, какъ правило, которое надо выучить, хотя, быть можетъ, въ глубинѣ души будетъ сознавать, что его законный вопросъ—зачѣмъ введено это условіе—оставленъ безъ отвѣта. Что же касается графической иллюстраціи, то она можетъ пояснить только содержаніе принимаемаго условія, но не цѣль, ради которой оно принято.

Если, напр., учащійся беретъ $\frac{4}{5}$ нѣкотораго разграфлен-

*) См. В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ. Педагогика математики, томъ I, страница 252.

наго на клетки прямоугольника, составляющаго въ свою очередь $\frac{2}{3}$ другого большаго прямоугольника *), и при этомъ убѣждается, что получаемая въ результатѣ фигура составляетъ $\frac{8}{15}$ большаго прямоугольника, то онъ выноситъ наглядное подтвержденіе той мысли, что $\frac{4}{5}$ отъ $\frac{2}{3}$ равно $\frac{8}{15}$, но не видитъ никакихъ мотивовъ, въ силу которыхъ отвѣтъ на данный вопросъ записывается въ формѣ $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ и самому дѣйствию приписывается названіе умноженія.

Чтобы выйти изъ всѣхъ этихъ затрудненій, необходимо соблюсти основное требованіе конкретно-индуктивнаго метода, именно—исходить при установленіи понятія объ умноженіи на дробь изъ условія типичной конкретной задачи, которая рѣшалась бы съ помощью этого дѣйствія. Пусть, напр., будетъ взята хотя бы такая задача: «пѣшеходъ проходитъ 5 верстъ въ каждый часъ; сколько верстъ пройдетъ онъ за $\frac{3}{4}$ часа (двигался равномерно съ той же скоростью)?» Такую задачу учащіеся умѣютъ рѣшать, но двумя дѣйствіями: сперва они узнаютъ, сколько верстъ пройдетъ пѣшеходъ за одну четверть часа ($5 : 4 = \frac{5}{4}$), а затѣмъ найдутъ, сколько верстъ пройдетъ онъ за 3 четверти часа ($\frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{15}{4}$). Послѣ того, какъ эта задача рѣшена и рѣшеніе ея записано въ двухъ строкахъ, необходимо выяснить учащимся, путемъ наводящихъ вопросовъ, смыслъ произведенныхъ ими дѣйствій (мы нашли четвертую долю отъ 5 и затѣмъ взяли ее 3 раза слагаемымъ),—а затѣмъ указать, что вмѣсто этого принято говорить короче: «мы умножили число 5 на $\frac{3}{4}$ », и записывать рѣшеніе задачи вмѣсто двухъ строчекъ въ одной: $5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$. Тогда учащимся не трудно будетъ уже сообразить, что, напр., умножить 10 на $\frac{5}{8}$ значитъ найти восьмую долю отъ 10 и взять ее слагаемымъ 5 разъ, и вообще установить, что умножить на дробь значитъ

*) См. В. Мрочекъ и Ф. Феллиновичъ. Педагогика математики, томъ I, страница 252.

взять такую долю множимаго, изъ какихъ состоитъ множитель, повторить ее слагаемыѣ столько разъ, сколько долей во множителѣ. Не трудно будетъ также сравнить полученный результатъ съ данными числами и установить правило умноженія на дробь, напр., изъ такой формѣ: «чтобы умножить на дробь, нужно умножить данное число на числителя и полученный результатъ раздѣлить на знаменателя». Здѣсь, конечно, необходимо выяснитъ съ помощью конкретныхъ примѣровъ, что порядокъ указанныхъ дѣйствій—умноженія на числителя и дѣленія на знаменателя—можетъ быть измѣненъ безъ измѣненія получаемого произведенія.

Предложенный здѣсь приемъ объясненія умноженія на дробь, разумѣется, не представляетъ чего-либо существенно новаго. Онъ является видоизмѣненіемъ давно извѣстнаго приема—разсматривать умноженіе на дробь, какъ нахожденіе данной части отъ цѣлаго. Но при такомъ способѣ объясненія учащіеся будутъ понимать смыслъ самаго процесса умноженія на дробь, притомъ въ наиболѣе конкретной формѣ и въ согласіи съ любой научной теоріей дробей. Кромѣ того, для нихъ будетъ сразу ясна одна изъ цѣлей, ради которой вводится предлагаемое условіе; цѣль эта—сокращеніе рѣчи и записи. Слѣдуетъ выяснитъ тутъ же и другую цѣль, ради которой повтореніе нѣкоторой доли даннаго числа носитъ названіе умноженія на дробь; именно, если замѣнить въ условіи разобранный задачи дробное число $\frac{3}{4}$ цѣлымъ, напр., 3-мя, то учащіеся увидятъ, что однородная съ данной задача на цѣлыя числа (цѣлеходъ проходитъ по 5 верстъ въ часъ; ск. верстъ пройдетъ онъ за 3 часа)—рѣшается умноженіемъ на цѣлое число. Всю силу этого мотива они одѣнютъ, однако, уже тогда, когда будутъ учиться составлять буквенныя формулы рѣшенія задачъ; тогда имъ станетъ ясно, что для упрощенія языка формулъ однородныя по смыслу задачи должны рѣшаться одинаковыми дѣйствіями.

До сихъ поръ здѣсь шла рѣчь объ умноженіи цѣлаго числа на дробь, такъ какъ на подобномъ примѣрѣ легче всего выяснитъ смыслъ умноженія на дробь; когда же этотъ смыслъ усвоенъ

учащимися, нетрудно примѣнить установленную точку зрѣнія и къ случаю умноженія дроби на дробь. Такъ, напр., умноженіе $\frac{4}{5}$ на $\frac{2}{3}$ мы будемъ разсматривать, какъ взятіе одной третьей доли отъ $\frac{4}{5}$ ($\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{15}$) и повтореніе полученнаго числа $\frac{4}{15}$ два раза слагаемъ ($\frac{4}{15} \cdot 2 = \frac{8}{15}$); сравнивъ затѣмъ окончательный результатъ $\frac{8}{15}$ съ данными числами, мы легко заставимъ учащихся вывести извѣстное правило перемноженія двухъ дробей.

Какъ только усвоено понятіе объ умноженіи на дробь, необходимо распространить его и на случай десятичныхъ дробей; извѣстное правило умноженія на десятичную дробь получается тогда, какъ частный случай правила, установленнаго вообще для дробей. Опытъ показываетъ, что умноженіе на десятичную дробь воспринимается учащимися съ этой точки зрѣнія болѣе сознательно, такъ какъ они уясняютъ себѣ, что перемноженіе данныхъ чиселъ съ отброшенными запятыми есть, собственно говоря, перемноженіе числителей данныхъ дробей, а постановкою запятой на должномъ мѣстѣ произведенія мы уменьшаемъ полученное число во столько разъ, какъ велико произведеніе знаменателей данныхъ дробей.

Дѣленіе на дробь можетъ быть изъяснено приѣмомъ, вполне аналогичнымъ тому, который былъ указанъ при разсмотрѣніи умноженія. Возьмемъ, напр., задачу: «Гребецъ проѣхалъ въ лодкѣ 5 верстъ въ теченіе $\frac{3}{4}$ часа; сколько верстъ могъ бы онъ проѣхать въ часъ, двигаясь съ той же скоростью?» Подобную задачу учащіеся рѣшаютъ двумя дѣйствіями: сперва они узнаютъ, сколько верстъ проѣхалъ бы гребецъ въ одну четверть часа ($5 : 3 = \frac{5}{3}$), а затѣмъ опредѣляютъ, сколько верстъ онъ могъ бы проѣхать въ часъ ($\frac{5}{3} \cdot 4 = \frac{20}{3}$ или $6\frac{2}{3}$). Затѣмъ нужно предложить учащимся сдѣлать повѣрку задачи; очевидно, для этой цѣли придется рѣшить обратный вопросъ: зная, что гребецъ проплывалъ въ лодкѣ $6\frac{2}{3}$ версты въ часъ, найти, сколько верстъ проплыветъ онъ за $\frac{3}{4}$ часа. Этотъ вопросъ рѣшается

умноженіемъ на дробь $(6\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4})$ и мы получаемъ въ результатѣ 5. Теперь ясно, что въ первоначальной задачѣ мы нашли такое число, которое, будучи умножено на $\frac{3}{4}$, дастъ въ результатѣ 5; условимся, какъ и въ ученіи о цѣлыхъ числахъ, называть отысканіе такого числа дѣленіемъ, и запишемъ рѣшеніе нашей задачи такъ: $5 : \frac{3}{4} = \frac{20}{3}$, т. е. въ одной строчкѣ вмѣсто двухъ. Сравнивая полученный результатъ съ данными числами, мы установимъ съ учащимися и правило дѣленія на дробь, хотя бы въ такой формулировкѣ: «чтобы раздѣлить на дробь, нужно раздѣлить данное число на числителя дроби и полученный результатъ умножить на ея знаменателя»; при этомъ необходимо объяснить, на данномъ и другихъ конкретныхъ примѣрахъ, что относительный порядокъ этихъ дѣйствій:—дѣленія на числителя и умноженія на знаменателя—не вліяетъ на окончательный результатъ.

Затѣмъ необходимо показать, что сдѣланные выводы могутъ быть распространены и на тѣ случаи, когда приходится рѣшать вопросы, сколько разъ одно дробное число содержится въ другомъ, или какую часть одного числа составляетъ другое. Для этой цѣли пригодна, напр., такая задача: фунтъ кофе стоитъ $\frac{3}{4}$ рубля; сколько фунтовъ этого кофе можно купить на 5 рублей? Рѣшая эту задачу непосредственно, учащіеся найдутъ сперва, сколько четвертей рубля заключается въ 5 рубляхъ ($4.5=20$), а затѣмъ — сколько разъ $\frac{3}{4}$ рубля содержится въ 20 четвертяхъ рубля ($20 : 3 = 6\frac{2}{3}$), или могутъ разсуждать такъ: если бы фунтъ кофе стоилъ 1 четверть рубля, то на рубль можно было бы купить 4 ф. кофе, а на 5 рублей $4.5=20$ фунтовъ; но такъ какъ цѣна фунта кофе — не $\frac{1}{4}$ рубля, а въ 3 раза больше ($\frac{3}{4}$ р.), то на тѣ же деньги можно купить кофе въ 3 раза меньше, т. е. $20:3$, или $6\frac{2}{3}$ фунта. Затѣмъ дѣлается провѣрка задачи, и оказывается, что искомое въ ней число, будучи умножено на $\frac{3}{4}$, дастъ въ результатѣ 5; слѣд.

можно условиться называть его частнымъ данныхъ чиселъ и писать по предыдущему: $5 : \frac{3}{4} = \frac{20}{3}$ или $6 \frac{2}{3}$.

Какъ и при разборѣ умноженія, слѣдуетъ показать учащимся, что однородныя съ данными задачи на цѣлыя числа рѣшаются дѣленіемъ на цѣлое число; а затѣмъ необходимо распространить установленныя условія и на случай дѣленія дробей на дроби. Такъ, напр., дѣленіе $\frac{4}{5}$ на $\frac{3}{8}$ мы будемъ по-нимать, какъ отысканіе такого числа, которое, будучи помножено на $\frac{3}{8}$, даетъ въ результатъ $\frac{4}{5}$. Въ силу этого опредѣленія $\frac{3}{8}$ искомага числа должны быть равны $\frac{4}{5} : \frac{3}{8}$ искомага числа должна быть въ 3 раза меньше $\frac{4}{5}$, т. е. $\frac{4}{15}$; а все иско-мое число должно быть въ 8 разъ больше полученной дроби, т. е. равно $\frac{32}{15}$. Сравнивая этотъ результатъ съ данными числами, учащіеся могутъ установить извѣстное правило дѣленія дроби на дроби.

Далѣе, всѣ сдѣланные выводы должны быть распространены на случай дѣленія на десятичную дроби. Дѣленіе на десятичную дроби лучше всего разсматривать, какъ частный случай дѣленія на дроби вообще: напр., при дѣленіи 2 на 0,3 мы должны умножить 2 на знаменателя данной дроби, т. е. на 10, и полученное число 20 раздѣлить на числителя 3; слѣд., $2 : 0,3 = 20 : 3 = 6 \frac{2}{3}$; при дѣленіи 0,002 на 0,03 мы должны умно-жить 0,002 на знаменателя дѣлителя, т. е. на 100, и резуль-татъ 0,2 раздѣлить на числителя 3; найдемъ частное 0,0666... Такимъ образомъ мы легко выяснимъ учащимся, что дѣленіе на десятичную дроби можетъ быть приведено къ дѣленію на цѣлое число.

Изложеннымъ исчерпываются, собственно говоря, всѣ основные вопросы методики курса дробей, проходимаго въ млад-шихъ классахъ нашей средней школы и соответствующихъ классахъ другихъ учебныхъ заведеній. Какъ извѣстно, тради-ціонная практика, кромѣ упомянутыхъ здѣсь вопросовъ, удѣ-ляетъ довольно много времени и вниманія учению о безконеч-

ныхъ десятичныхъ періодическихъ дробяхъ и объ обращеніи ихъ въ обыкновенныя. Но въ настоящее время уже нѣчто не оспариваетъ той истины, что этому ученію совсѣмъ не должно быть мѣста въ курсѣ дробей, изучаемомъ въ младшемъ возрастѣ, тѣмъ болѣе, что оно не можетъ быть изложено на данной ступени безъ крупныхъ логическихъ натяжекъ. Вопросъ о періодическихъ дробяхъ долженъ быть отнесенъ къ курсу теоретической ариметики, гдѣ онъ, въ связи съ понятіемъ о безконечной не періодической десятичной дроби, играетъ нѣкоторую роль при изложеніи ученія о несоизмѣримомъ числѣ; въ младшемъ же возрастѣ ученіе о періодическихъ дробяхъ, ихъ видахъ и правилахъ ихъ обращенія въ простыя является тяжкимъ и совершенно бесполезнымъ балластомъ, отъ котораго давно пора освободить нашу программу арифметики и нашей подросткающей поколѣнія».

Тезисы.

1) Въ методикѣ ученія о дробяхъ самымъ спорнымъ пунктомъ является въ настоящее время вопросъ объ относительномъ порядкѣ изученія дробей простыхъ и десятичныхъ.

2) Ни традиціонное распредѣленіе (сначала полный курсъ простыхъ дробей, затѣмъ десятичныя дроби, какъ ихъ частный случай), ни предлагаемый въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ обратный порядокъ (сначала всѣ дѣйствія надъ десятичными дробями, затѣмъ болѣе или менѣе полный курсъ простыхъ дробей), — не могутъ считаться вполне удовлетворительными съ педагогической точки зрѣнія.

3) Наиболее целесообразнымъ является распредѣленіе всего курса дробей на циклы, въ каждомъ изъ которыхъ изучались бы вопросы приблизительно одинаковой дидактической трудности.

4) Первый изъ этихъ цикловъ долженъ быть отведенъ ознакомленію съ простѣйшими дробями помощью наглядныхъ пособій и дѣйствительнаго измѣренія и дѣленія предметовъ на части.

5) Второй циклъ слѣдуетъ посвятить изученію десятич-

ныхъ дробей и рѣшенію при помощи ихъ всѣхъ подходящихъ попросовъ, по безъ изученія дѣйствій умноженія и дѣленія на дробь.

6) Въ третьихъ циклахъ слѣдуетъ проходить простыя и десятичныя дроби параллельно и ввести въ соответственный моментъ понятіе объ умноженіи и дѣленіи на дробь на цѣлесообразно подобранныхъ конкретныхъ примѣрахъ.

7) Независимо отъ вышесказаннаго, въ традиціонной программѣ ариметики должны быть сдѣланы цѣлесообразныя сокращенія въ курсѣ дробей и по вопросамъ, съ ними связаннымъ, а именно. слѣдуетъ значительно сократить ученіе о дѣлимости чиселъ и совершенно упразднить изученіе періодическихъ десятичныхъ дробей.

Пренія по докладу К. О. Лебединцева.

М. Е. Волокобинскій (Рига) заступаетъ за тѣхъ авторовъ, которые высказываются за прохожденіе десятичныхъ дробей ранѣе простыхъ. По его мнѣнію, сами учащіеся чувствуютъ, что для помноженія числа на $\frac{1}{10}$ надо взять одну десятую долю множимаго. Онъ оспариваетъ указаніе, что въ нѣмецкихъ методикахъ аритметики еще десять лѣтъ тому назадъ говорилось о томъ, что помножить число на $\frac{2}{5}$ значить взять двѣ пятые доли этого числа. Онъ, вообще, не считаетъ предложеній докладчика повыми.

А. Н. Шапошниковъ (Москва), присоединившись ко всѣмъ положеніямъ доклада, указалъ, что онъ болѣе пяти лѣтъ осуществлялъ съ полнымъ успѣхомъ ту-же систему обученія дробьямъ. Лишь въ вопросѣ объ умноженіи на дробь онъ предпочитаетъ разъяснять опредѣленіе, правило и выводъ относительно вопроса рѣшаемаго умноженіемъ на дробь (или дѣленіемъ). Опредѣленіе сначала усматривается на конкретной задачѣ умноженія на цѣлое число. Если замѣнить цѣлое число дробью и пожелать оперировать съ членами этой дроби, то умноженіе будетъ выполнено двумя дѣйствіями: дѣленіемъ на знаменателя и умноженіемъ на числителя. Отсюда первый доводъ въ пользу естественности введенія подобнаго дѣйствія, какъ умноженія. Итакъ, умноженіе на дробь, т. е. на число, выраженное сложице, тѣмъ цѣлое, раз-

считается, какъ болѣе сложное дѣйствіе, состоящее изъ двухъ простыхъ. Выводъ о томъ, какой вопросъ рѣшается умноженіемъ на дробь, получается уже легко: дѣленіемъ на знаменателя находится доля, а умноженіемъ на числителя—нѣсколько долей. Этотъ выводъ формулируется обстоятельнѣе, чѣмъ это обыкновенно принято, а именно такъ: *умноженіемъ на дробь мы находимъ по разряду данное числа размѣръ одной или нѣсколькихъ его частей*".

В. М. Курпентинъ (Елисаветградъ). „Жаль, что докладчикъ упустилъ изъ виду чрезвычайно важное соображеніе въ пользу того, чтобы простыя дроби проходились раньше десятичныхъ. Слишкомъ уже извѣстно всѣмъ, что дѣти своими же руками должны получать $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ и т. д. часть предмета, разрывая его на названныя части. Что же мы сдѣлаемъ съ десятичными долями, когда самыя крупныя доли—это десятые, а слѣдующія—уже сотые? Но докладчикъ, по моему, ошибается, допуская дѣленіе, въ которомъ частное получается неточное. Если докладчикъ желаетъ выбросить изъ начального курса ариѳметики періодическія дроби, то это является нераціональнымъ, ибо дѣти, часто встрѣчая въ разныхъ книжкахъ этотъ терминъ, сами заговорятъ о нихъ при полученіи неточнаго частнаго“.

Я. Г. Саръ (Юрьевъ). „По моему, умноженіе и дѣленіе дробей при изложеніи, согласномъ съ предложеніями докладчика, не сложнѣе сложенія и вычитанія дробей съ разными знаменателями. Поэтому, я думаю, что умноженіе и дѣленіе дробей можно даже пройти ранѣе сложенія и вычитанія. Далѣе, слѣдовало-бы уже оставить отбрасываніе запятыхъ при умноженіи и дѣленіи десятичныхъ дробей и пріучать учащихся сосчитывать десятые, сотые и т. д. доли такимъ-же образомъ, какъ сосчитываются единицы вышнихъ разрядовъ“.

И. А. Павловъ (Тифлисъ). „Дроби не должны быть выдѣляемы въ отдѣльный концентръ, такъ какъ дѣти знакомятся съ частями единицы совмѣстно съ цѣлыми числами. Опираясь на психологію ребенка, всѣ дѣйствія надъ дробями надо проходить параллельно съ дѣйствіями надъ цѣлыми числами. Относительно дѣленія дробей, выдѣляемаго докладчикомъ, ввиду его трудности, въ отдѣльный концентръ, нужно сказать, что это совершенно излишне. Дѣленіе дробей крайне упрощается приведеніемъ дробей къ общему знаменателю“.

И. И. Потоцкій (Москва): «1) Дѣйствія надъ десятичными дробями проще, такъ какъ они не имѣютъ знаменателя; 2) логическая ошибка—распространеніе свойствъ цѣлыхъ чиселъ на дроби—отпадаетъ при томъ взглядѣ на десятичныя дроби, по которому они являются результатомъ десятичной системы; этимъ облег-

чается объясненіе умноженія и дѣленія десятичныхъ дробей; 3) опредѣленіе умноженія и дѣленія на дробь слѣдуетъ давать лишь послѣ усвоенія учениками самихъ дѣйствій“.

В. Р. Мроцьскъ (Спб.) «Не знаешь, удивляться или негодовать, выслушивая подобные доклады. Вопросъ, имѣющій за собою столѣтнюю давность, рѣшаемый и давно рѣшенный на практикѣ, здѣсь представленъ въ видѣ какого-то гордіева узла, а его quasi—сѣченіе преподносится въ видѣ педагогической Америки. Порядокъ прохожденія, предлагаемый г. Лебединцевымъ, давно уже сталъ притчей во языцѣхъ, а за послѣдніе годы онъ вошелъ во всѣ официальные программы. Въ той же «Педагогикѣ Математики», съ которой полемизировалъ докладчикъ, имѣется цитата, имъ не упомянутая (стр. 247); я ее приведу: «Изъ изложеннаго видно, что курсъ дробей долженъ распадаться на три цикла. Въ первомъ надо познакомить дѣтей съ простѣйшими случаями дробленія конкретныхъ «единицъ» (см. программу курса); эти четвертушки, половинки, восьмушки свободно усваиваются дѣтьми, также, какъ и простыя выкладки надъ ними. Во второмъ—научить производить дѣйствія надъ десятичными конечными числами. Въ третьемъ—изложить не теорію обыкновенныхъ дробей, а лишь условныя опредѣленія оперированія съ символами $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$ на числовыхъ, а затѣмъ и буквенныхъ примѣрахъ, поскольку эти операціи несобходимы въ курсѣ уравненій. Само собой разумѣется, что теорія дѣлимости чиселъ должна быть исключена изъ курса».—Что же по ваго предлагаетъ въ такомъ случаѣ г. Лебединцевъ?»

„Оставимъ, поэтому, мысли доклада въ сторонѣ и посмотримъ содержаніе. Долженъ указать, что докладчикъ неправильно передаетъ цитируемыхъ имъ авторовъ. Такъ, цитируя нашу книгу, онъ приписываетъ намъ рекомендацію опредѣленія умноженія дроби на дробь, тогда какъ мы привели лишь мнѣніе Вебера и Вельштейна. Жаль, что, указывая на стр. 252, докладчикъ упустилъ изъ виду стр. 253, гдѣ сказано: «Дробь есть результатъ измѣренія, дробь есть количество. Это—гносеологическая точка зрѣнія. Она — и только она—доступна школьному пониманію и т. д.». Подобная же путаница произошла и съ другой цитатой (о графической иллюстраціи произведенія двухъ дробей): мы ея не рекомендуемъ, а мы лишь поясняемъ, что, принявъ опредѣленіе теоріи паръ, надо дать иллюстрацію“.

„Не лучше дѣло обстоитъ и съ Вальземанномъ. Вопросъ о формѣ пособій имѣетъ богатую литературу, особенно нѣмецкую и американскую; специально по вопросу о дробяхъ давно уже установлено, что кругъ—лучшее пособие, такъ какъ: часть прямо-

угольника похожа на прямоугольникъ, но никакая часть круга не похожа на кругъ. Зачѣмъ же принимать результаты одной работы за откровеніе?»

„Такъ какъ докладчикъ особенно много удѣлилъ вниманія умноженію дробей, то я приведу мнѣніе Пуанкарэ (*Les définitions générales en mathématiques*), высказанное имъ еще въ 1904 году: «Разсмотримъ дѣйствія надъ дробями. Здѣсь трудность только въ опредѣленіи умноженія. Лучше всего сначала изложить теорію пропорцій,—только изъ нея можетъ вытечь логическое опредѣленіе; но чтобы обезпечить правильное пониманіе опредѣленій, встрѣчающихся въ началѣ этой теоріи, надо ихъ подготовить многочисленными примѣрами, взятыми изъ классическихъ задачъ на тройное правило, въ которыя надо позаботиться ввести дробныя данныя». Такъ что. «иѣшсходъ, проходящій 5 верстъ...» Но комментаріи, какъ будто, и излишни?».

„Итакъ: повторять азбуку иногда полезно, но надо выбрать подходящее время“.

К. О. Лебединцевъ (Москва). „Въ отвѣтъ на сдѣланныя замѣчанія еще разъ изложу вкратцѣ свою точку зрѣнія на вопросъ объ относительномъ порядкѣ прохожденія курса дробей простыхъ и десятичныхъ. Есть два противоположныхъ взгляда на этотъ вопросъ: одинъ, традиціонный, по которому сперва долженъ проходить полный курсъ простыхъ дробей, а затѣмъ должны изучаться десятичныя дроби, какъ ихъ частный случай; другой, предлагаемый нѣкоторыми сторонниками реформы, состоитъ въ томъ, чтобы предпосылать курсу простыхъ дробей изученіе всѣхъ дѣйствій надъ дробями десятичными. Педагогическіе недостатки традиціонной точки зрѣнія извѣстны и не оспариваются. Но если мы примемъ вторую точку зрѣнія, то неизбежно столкнемся съ необходимостью объяснить учащимся, на чемъ основано правило умноженія на десятичную дробь. Если при этомъ ссылаться на законы измѣненія произведенія, установленные пока только для цѣлыхъ чиселъ, то мы впадемъ въ логическую ошибку; если же давать полное опредѣленіе умноженія на десятичную дробь (какъ это дѣлается, напр., въ задачникѣ пяти московскихъ преподавателей), то естественно поставить вопросъ: да цѣлесообразно ли это съ педагогической точки зрѣнія? Не лучше ли выдѣлить изъ курса десятичныхъ дробей тѣ вопросы, которые не связаны съ понятіемъ объ умноженіи и дѣленіи на дробь, и создать изъ этихъ вопросовъ особый концентръ, какъ это предложено въ докладѣ, а изученіе умноженія на дробь (все равно, десятичную или простую) отнести къ концу курса дробей? Правда, г. Мрочекъ указалъ, что можно вовсе не говорить

объ умноженіи и дѣленіи на дробь въ курсѣ ариѳметики младшихъ классовъ. Но такая точка зрѣнія не приемлема, потому что въ этомъ случаѣ мы при началѣ курса алгебры не всегда могли бы составлять такія общія формулы рѣшенія задачъ, которыя охватывали бы собою и цѣлыя, и дробныя значенія буквъ. По поводу мнѣнія Пуанкаре, приведеннаго г. Мроческомъ, можно сказать, что предлагаемый имъ способъ объясненія, конечно, допустимъ съ логической точки зрѣнія; но не доказана его болѣешая цѣлесообразность въ педагогическомъ отношеніи*.

„Графическое истолкованіе умноженія на дробь, конечно, цѣлесообразно для уясненія смысла этого дѣйствія, но оно недостаточно, т. к. не даетъ учащемуся отвѣта на вопросъ, съ какой цѣлью извѣстная совокупность дѣйствій (умноженія на числителя и дѣленія на знаменателя) названа именно «умноженіемъ на дробь». Что касается вопроса о круглой или прямоугольной формѣ наглядныхъ пособій, то опыты Вальземайна, упомянутые въ докладѣ, привели его къ заключенію о преимуществѣ прямоугольной формы; если другіе экспериментаторы пришли къ инымъ результатамъ, то значить вопросъ еще споренъ, и необходимы новыя опыты для его разъясненія. Но этотъ вопросъ не имѣетъ прямого отношенія къ основнымъ положеніямъ доклада. Наличие періодическихъ дробей въ существующихъ задачникахъ не можетъ служить препятствіемъ къ устраненію изученія этихъ дробей изъ курса ариѳметики. Нужны такіе задачники, которые бы не содержали періодическихъ дробей, а при пользованіи существующими задачками учитель можетъ замѣнять періодическія дроби соотвѣтственными простыми*.

„Въ заключеніе подчеркиваю, что основной цѣлью доклада было предложить такое распредѣленіе курса дробей простыхъ и десятичныхъ, которое совмѣщало бы всѣ выгодныя стороны ранняго изученія десятичныхъ дробей съ отсутствіемъ логическихъ натяжекъ и такимъ образомъ удовлетворяло бы, какъ научно-логическимъ, такъ и педагогическимъ требованіямъ*.

V. Приближенные и сокращенныя вычисленія въ средней школѣ.

Докладъ В. А. Кругуса (Спб.).

«Все чаще раздаются голоса, указывающіе, что современная школьная математика часто занимается вопросами, не имѣющими существеннаго (научнаго или практическаго) значенія,

напр., занимается рѣшеніемъ нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ уравненій четвертой степени, между тѣмъ, какъ было бы гораздо полезнѣе дать понятіе о графическомъ рѣшеніи уравненій. Вообще, вопросы, рассматриваемые въ средней школѣ, и въ особенности въ гимназіяхъ, часто носятъ характеръ матеріала, случайно вырваннаго изъ различныхъ отдѣловъ математики, безъ какой-бы то ни было связи со всѣмъ остальнымъ. Такіе примѣры, какъ періодическія и непрерывныя дроби, всѣмъ извѣстны. Но ни въ одной области эта случайность не сказывается такъ рѣзко, какъ въ области "приближенныхъ вычисленій". Въ средней школѣ учатъ съ определенной точностью вычислять корень квадратный; въ высшей---останавливаются преимущественно на приближенномъ рѣшеніи уравненій и на приближенномъ вычисленіи определенныхъ интеграловъ. Между тѣмъ, правилъ для приближенного выполненія болѣе простыхъ операцій, какъ умноженіе и дѣленіе въ средней школѣ, или вычисленіе производной для определеннаго значенія независимаго переменнаго по частнымъ значеніямъ функціи, часто совсѣмъ не даютъ. Такое положеніе создалось, вѣроятно, вслѣдствіе того, что эти простѣйшія операціи могутъ быть всегда выполнены точно, если только точно заданы компоненты (при умноженіи и дѣленіи) или задана функція, а не рядъ отдѣльныхъ ея значеній. Несомнѣнно, однако, что умѣніе производить вычисленія приближенно чрезвычайно важно.

Вообще же, надо признать, что кончающіе среднюю школу вычисляютъ плохо, а о приближенныхъ вычисленіяхъ не имѣютъ понятія, напр., не знаютъ, что при вычисленіи съ помощью пятизначныхъ таблицъ, нельзя брать для π значеніе $\frac{22}{7}$. Особенное затрудненіе испытываютъ учащіеся и ихъ руководители, какъ въ средней, такъ и въ высшей школѣ, во время практическихъ работъ. Имѣя опытные данныя съ тремя цифрами, учащіеся часто берутъ результатъ отъ перемноженія или дѣленія ихъ съ пятью и шестью цифрами. Знакомясь съ методами приближенного рѣшенія уравненій, студенты изучаютъ только теорію и избѣгаютъ продѣлывать какіе-нибудь при-

мѣры, такъ какъ приближенное выполненіе элементарныхъ дѣйствій имѣ мало знакомо, и все это выходитъ хорошо только въ теоріи. Въ виду всего этого, необходимо учить вычисленію. Это умѣнье складывается изъ умѣнья вычислять быстро и вычислять вѣрно. Я думаю, что оба эти качества почти одинаково важны. И напрасно, по моему мнѣнію, П. А. Долгушинъ*), авторъ самаго обстоятельнаго сочиненія на русскомъ языкѣ по приближеннымъ вычисленіямъ, считаетъ, что сокращенныя вычисленія составляютъ роскошь для средней школы.

Приближенные вычисленія выполняются, какъ извѣстно, не съ числами, дающими истинныя значенія величинъ, а съ числами, измѣряющими эти значенія съ нѣкоторой погрѣшностью. Погрѣшность числа опредѣляется абсолютной ошибкой, относительной ошибкой или числомъ вѣрныхъ цифръ, причемъ лучшее опредѣленіе точности даетъ относительная ошибка. Поэтому мы чаще всего опредѣляемъ ошибку въ процентахъ. Нѣсколько худшее понятіе даетъ число вѣрныхъ цифръ, напр., если числа 987 и 187 имѣютъ по три вѣрныхъ цифры, то ошибка перваго меньше $\frac{1}{900}$, а втораго меньше $\frac{1}{150}$. Наконецъ, худшее опредѣленіе точности даетъ абсолютная ошибка; напр., дано, что нѣкоторая длина измѣрена съ абсолютной ошибкой въ 1 см.; измѣреніе сдѣлано точно, если это длина въ 1 км., и очень неточно, если она равна 1 дм.

Теорія приближенныхъ вычисленій рѣшаетъ двѣ основныя задачи: во-первыхъ, по даннымъ приближеннымъ значеніямъ вычислить результатъ съ наибольшей возможной точностью; во-вторыхъ, по даннымъ точнымъ или заданнымъ съ малой погрѣшностью значеніямъ найти результатъ съ опредѣленной напередъ заданной точностью. При этомъ послѣдняя задача распадается на двѣ: 1) найти результатъ съ заданной абсо-

*) Въ замѣчаніи о методѣ П. Долгушина сдѣланы на основаніи перваго изданія брошюры «П. Долгушинъ. Вычисленія по приближенію». Въ 1912 году вышло второе изданіе той-же брошюры, въ которомъ авторъ еще значительно улучшилъ и упростилъ свой методъ, въ особенности при опредѣленіи числа цифръ, которое нужно взять въ каждомъ компонентѣ.

лютой ошибкой и 2) съ заданнымъ числомъ вѣрныхъ цифръ или съ заданной относительной ошибкой. (Подъ рубрикой 2) соединены двѣ различныя задачи, но онѣ мало отличаются другъ отъ друга). Эти три различныя задачи имѣютъ очень различное практическое значеніе. Первая задача—нахожденіе результата съ наибольшей точностью—встрѣчается рѣдко и почти не имѣетъ практическихъ приложений. Вторая задача имѣетъ сравнительно малое значеніе, потому что, какъ уже замѣчено, точность лучше опредѣляется относительной, чѣмъ абсолютной ошибкой; эта задача не встрѣчается въ техникахъ, но имѣетъ приложение въ коммерческихъ наукахъ, гдѣ часто, независимо отъ значенія суммы, требуется вычислить ее съ точностью до 1 рубля или до 1 копейки. Наконецъ, послѣдняя задача,—нахожденіе результата съ данной относительной ошибкой или съ даннымъ числомъ вѣрныхъ цифръ, имѣетъ наибольшее значеніе; почти только эта задача встрѣчается въ техникахъ, и въ средней общеобразовательной школѣ было бы вполне достаточно ознакомить именно съ этой задачей.

Единственный цѣлесообразный строгій методъ для рѣшенія этой задачи заключается въ слѣдующемъ: вычисляють приближенное значеніе результата; затѣмъ, имѣя приближенный результатъ и относительную ошибку, находятъ абсолютную ошибку результата и, переходя послѣдовательно отъ окончательнаго результата къ заданнымъ компонентамъ, опредѣляютъ, съ какимъ числомъ цифръ надо взять каждый изъ компонентовъ. Такой методъ неудобенъ вообще, и особенно рѣзко это сказывается въ томъ случаѣ, если требуется вычислить результатъ съ небольшимъ числомъ цифръ, напр., съ тремя. Поэтому было бы чрезвычайно важно дать такія практическія правила, которыми можно было бы пользоваться въ не очень сложныхъ задачахъ, не прибѣгая къ предварительному вычисленію результата для опредѣленія допустимой для каждаго компонента погрѣшности.

Разсмотримъ вопросъ о числѣ вѣрныхъ цифръ результата какого-нибудь дѣйствія, напр., умноженія. Для этого воспользуемся теоремой: относительная ошибка произведенія меньше или равна суммѣ относительныхъ ошибокъ множителей. (Дѣйствительно, относи-

тельная ошибка произведения*) $(a + \delta a) (b + \delta b) - ab = \frac{\delta a b}{ab} + \frac{b \delta a}{ab} + \frac{\delta a \delta b}{ab}$
 $= \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} = \alpha + \beta$, членом $\frac{\delta a \delta b}{ab}$ можно пренебречь, поэтому относительная ошибка произведения равна или меньше, если δa и δb различных знаков, суммы относительных ошибок множителей). Положив, дано два числа, имѣющих по n вѣрных цифръ, въ такомъ случаѣ относительная ошибка произведенія равна или меньше $\frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{1}{10^{n-1}} \left\{ \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right\} = \frac{1}{10^{n-1}} \cdot \frac{1}{10^{n-1}}$, гдѣ p_1 и p_2 первыми значенія цифры множителей. Если $\frac{1}{2} < P < 1$, (что можетъ случиться только тогда, когда, по крайней мѣрѣ, одно изъ чиселъ начинается съ единицы), то относительная ошибка меньше $\frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n-1}}$ и число вѣрных цифръ $n-2$ или $n-1$; если $P < 1$, то число вѣрных цифръ $(n-1)$ или n . Если оба числа начинаются съ цифръ не меньше двухъ, то число вѣрных цифръ произведенія не можетъ быть меньше $n-1$. Вообще, въ произведеніи двухъ чиселъ съ n вѣрыми цифрами почти всегда можно указать $(n-1)$ вѣрных цифръ. Однако, если ошибка въ каждомъ или одномъ изъ компонентов происходить только отъ закругленія, т. е. меньше $\frac{1}{2 \cdot 10^{n-1}}$, гдѣ p первая цифра числа, то погрѣшность произведенія вдвое меньше указанной выше, знакъ ея часто извѣстенъ, и можно почти съ достоверностью указать $(n-1)$ вѣрных цифръ въ произведеніи, а взявъ въ произведеніи n цифръ, сдѣлаемъ рѣдко ошибку, бо́льшую двухъ единицъ въ послѣдней цифрѣ. Всѣ предыдущія утвержденія можно съ такимъ же основаніемъ высказать относительно частнаго и съ еще бо́льшимъ основаніемъ относительно корня квадратнаго. (Относительная ошибка частнаго не больше суммы относительныхъ ошибокъ дѣляимаго и дѣлителя, а относительная ошибка корня равна половинѣ относительной ошибки подкореннаго количества).

При приближенныхъ вычисленіяхъ чрезвычайно удобно пользоваться также сокращенными вычисленіями, способы которыхъ могутъ быть даны и въ средней школѣ. Сокращенный способъ умноженія Oughtread'a заключается въ слѣдующемъ.

*) δa и δb —абсолютныя, α и β —относительныя ошибки множителей. В. К.

Цифры множителя пишутъ подъ цифрами множимаго въ обратномъ порядкѣ; затѣмъ составляютъ произведеніи множимаго на каждую цифру множителя, причемъ составляютъ произведеніе, начиная только съ той цифры множимаго, которая стоитъ надъ цифрой множителя, на которую помножаютъ; всѣ отдѣльныя произведенія такъ подписываютъ одно подъ другимъ, чтобы послѣднія цифры ихъ находились въ одномъ столбцѣ. Положимъ, дано перемножить 9749 на 72, 45, причемъ допускается откидываніе цифръ нашего порядка, чѣмъ сотня; подписываемъ множитель такъ, чтобы единицы множителя находились подъ цифрой сотенъ множимаго. Умноженіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r}
 9749 \\
 5427 \\
 \hline
 6818 \\
 194 \\
 36 \\
 \hline
 7048 \text{ сотенъ.}
 \end{array}$$

Между тѣмъ, истинное произведеніе—706315,05, т. е. включаетъ 7063 сотни. Чтобы получить въ произведеніи истинное число единицъ опредѣленнаго n -го порядка (т. е. отличное отъ истиннаго менѣе, чѣмъ на единицу этого порядка) можно пользоваться слѣдующимъ строгимъ правиломъ: подписать цифру единицъ множителя подъ цифрой множимаго $(n-2)$ -го порядка; затѣмъ, выполнивъ перемноженіе, откинуть двѣ послѣднія цифры, а послѣднюю изъ оставшихся цифръ увеличить на единицу (см., напр., Vieille). Умноженіе для даннаго примѣра слѣдующее:

$$\begin{array}{r}
 97490 \\
 5427 \\
 \hline
 682430 \\
 19498 \\
 3896 \\
 485 \\
 \hline
 706309
 \end{array}$$

Результатъ 7064 сотни (отличается отъ истиннаго менѣе, чѣмъ на одну сотню). Приведенное правило остается справед-

ливѣмъ, если число цифръ искомага произведенія не велико, напр., не больше десяти. Тотъ же результатъ можно получить, подписывая множитель такъ же, какъ въ первомъ случаѣ, прибавляя, однако къ каждому произведенію закругленное число десятковъ произведенія цифры множителя на первую (изъ откинутыхъ) закругленную цифру множимаго. Тогда умноженіе представится въ слѣд. видѣ:

$$\begin{array}{r}
 9749 \\
 5427 \\
 \hline
 6824 \\
 195 \\
 39 \\
 5 \\
 \hline
 7063 \text{ сотенъ.}
 \end{array}$$

Здѣсь къ первому произведенію $947 \times 7 = 6818$ прибавлено 6, т. е. прибавлено (закругленное) число десятковъ произведенія 7×9 , ко второму произведенію $97 \times 2 = 194$ прибавлено число десятковъ произведенія 2×5 , т. е. 1, причемъ взято 2×5 , а не 2×1 , т. к. послѣ цифры 4 стоитъ цифра 9.

При такомъ способѣ перемноженія погрѣшность (по сравненію съ первымъ способомъ) уменьшается, вообще, болѣе, чѣмъ въ десять разъ, т. к., во-первыхъ, принимается во вниманіе не просто слѣдующая цифра, а слѣдующая цифра съ закругленіемъ, и, во-вторыхъ, ошибки здѣсь могутъ быть разныхъ знаковъ, и вѣроятность того, что онѣ отчасти сократятся, очень велика. Поэтому произведеніе чиселъ съ небольшимъ числомъ знаковъ (напр., четырехъ—или пятизначныхъ), полученное по описанному способу, только въ рѣдкихъ случаяхъ будетъ отличаться отъ истиннаго на одну или двѣ единицы послѣдняго знака. (Изъ приведенномъ, взятомъ наудачу, примѣрѣ видѣны цифры вѣрны).

Сокращенное дѣленіе дѣлается слѣдующимъ образомъ: положимъ, дано раздѣлить 743293 на 85672; сначала дѣлятъ на 85672, затѣмъ остатокъ 57917, не приписывая нуля, дѣлятъ на 8567 и т. д.

$$\begin{array}{r|l}
 743293 & 85672 \\
 685376 & 8,6761 \\
 \hline
 57917 & \\
 51402 & \\
 \hline
 6515 & \\
 5992 & \\
 \hline
 523 & \\
 510 & \\
 \hline
 13 &
 \end{array}$$

Частное получилось 8,6761; между тѣмъ истинный результатъ 8,6759. Правило для опредѣленія погрѣшности слѣдующее: чтобы получить въ частномъ n вѣрныхъ цифръ, слѣдуетъ взять въ дѣлителѣ $(n+2)$ цифры {во многихъ случаяхъ можно ограничиться $(n+1)$ -ой цифрой}, а въ дѣлимомъ такое число цифръ, чтобы дѣлитель содержался въ немъ болѣе одного и менѣе десяти разъ, т. е. $(n+2)$ или $(n+3)$ цифры. Если, однако, при дѣленіи, какъ и при умноженіи, принимать во вниманіе первую вычеркнутую цифру и брать ее закругленною, то ошибка, происходящая отъ сокращенія дѣленія, значительно уменьшится. Поэтому, взявъ въ дѣлителѣ n цифръ, а въ дѣлимомъ $(n+1)$ цифру, получимъ частное, въ которомъ n -ая цифра будетъ вѣрна или же будетъ отличаться отъ истинной на одну, и рѣдко—на двѣ единицы. Последнее положеніе справедливо, если число цифръ, которое надо получить въ частномъ, не всяко (не превосходитъ четырехъ или пяти). Вышеприведенное дѣленіе представится въ слѣд. видѣ (если въ частномъ нужно имѣть 4 вѣрныхъ цифры):

$$\begin{array}{r|l}
 74329 & 8567 \\
 68536 & 8,676 \\
 \hline
 5793 & \\
 5140 & \\
 \hline
 653 & \\
 600 & \\
 \hline
 53 &
 \end{array}$$

Принимая во внимание, что строгая теория приближенных вычислений даже в том простейшем виде, который дал ей Долгушинъ, заключаетъ целый рядъ теоремъ, нельзя не согласиться съ тѣмъ, что если она и доступна въ средней школѣ, то только въ старшихъ классахъ и требуетъ значительной затраты времени. Кроме того, вычисления въ большинстве случаевъ получаются все-таки неудобными, такъ какъ для опредѣленія числа цифръ, съ которыми нужно взять каждый изъ компонентовъ, требуется, хотя бы грубо, предвычислить результатъ. Между тѣмъ, было бы желательно дать практику сокращенныхъ и приближенныхъ вычислений уже съ младшихъ классовъ; только въ этомъ случаѣ учащіеся, приобретутъ необходимый навыкъ и прочно усвоятъ эти знания.

Какъ я старался подчеркнуть выше, въ результатѣ всякаго дѣйствія (кроме вычитанія) съ числами, имѣющими n вѣрныхъ цифръ вообще получается результатъ съ $(n - 1)$ вѣрными цифрами; ошибки въ n -омъ знакѣ въ исключительныхъ случаяхъ превосходятъ двѣ или три единицы; поэтому хотя эта цифра и невѣрна, но откидывать ее не слѣдуетъ. Сохраняя же эту n -ую цифру, можно будетъ и въ результатѣ недлиннаго ряда дѣйствій (пяти или шести) получить $(n - 1)$ вѣрныхъ цифръ. Все это остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, когда пользуются сокращенными вычислениями, если только число n не велико (не превосходитъ четырехъ или, в крайнемъ случаѣ, пяти). Поэтому можно установить такіе правила, пригодныя для школьной практики:

Если требуется вычислить некоторое выраженіе и получить результатъ съ n вѣрными цифрами, то слѣдуетъ брать все компоненты съ $(n + 1)$ знаками, произвести все вычисленія, слѣдуя за тѣмъ, чтобы въ результатѣ каждаго дѣйствія получалось не менѣе $(n + 1)$ цифръ и въ окончательномъ результатѣ откинуть послѣдній знакъ. Если бы въ результатѣ какого-нибудь дѣйствія получилось $(n + 1 - p)$ цифръ, то слѣдуетъ увеличить въ соответствующихъ компонентахъ число знаковъ p цифрами. Это можетъ случиться толи-

въ случаѣ вычитанія]. Примѣняя эти правила можно пользоваться приемами сокращенныхъ вычисленій, принимая во вниманіе, какъ это указано выше, первую зачеркнутую цифру. При дѣленіи слѣдуетъ къ дѣльному приписать 0, если оно получилось съ $(n+1)$ цифрами, и не уничтожать $(n+2)$ -ой цифры, — въ другихъ случаяхъ $(n+2)$ -ая цифра откидывается, — если таковая получилась. Въ окончательномъ результатѣ n -ая цифра будетъ вѣрна, или, въ нѣкоторыхъ рѣдкихъ случаяхъ, отличаться отъ истинной на одну или двѣ единицы, если только общее число дѣйствій не превосходитъ шести и n не превосходитъ четырехъ.

Если бы нужна была полная увѣренность въ n -ой цифрѣ или условіи только-что приведенныя не были выполнены, то въ компонентахъ слѣдуетъ брать $(n+2)$ или даже $(n+3)$ цифры. Едва ли въ школьной практикѣ часто встрѣчается надобность въ этомъ. Позволяю себѣ привести вычисленіе выполненное по этимъ правиламъ. Дано вычислить $(\sqrt[2]{2,57812})^2$ съ относительной ошибкой 0,001, т. е. съ четырьмя цифрами.

$$\sqrt{2} = 1,4142; 1,4142 \cdot 2,5781 = 3,9923.$$

3,9923	15,9385	25781
32998	154686	6,1823
119769	4699	
35931	2578	
3593	—	2121
80	2062	
12	—	59
15,9385	52	
	7	

Въ данномъ примѣрѣ всѣ четыре цифры результата 6,182 вѣрны. {Примѣръ этотъ приведенъ у Fassbinder'a «Theorie et

pratique des approximations numériques» и Долгушина «Вычисления по приближению»].

Если бы требовалось вычислить $\sqrt{650} + \sqrt{0,02}$ съ двумя цифрами, то пришлось бы взять π и $\sqrt{2}$ съ шестью цифрами, т. е. при вычитании первые три цифры равны нулю; [конечно $\sqrt{0,02}$ достаточно взять съ одной цифрой]. Вычисления следующие.

$$\sqrt{2} = 1,41421.$$

1,41421	3,14159
222	3,13954
282842	0,00205
28284	
2828	
3.13954	

$\sqrt{650} = 25,5$	$\sqrt{0,02} = 0,1$	25,5	2560 205
		+ 0,1	205 12500
		25,6	510
			110
			100

Слѣд., результатъ 12000 или 13000. [Истинный результатъ нѣсколько ближе къ 13000].

Я думаю, что только такую простую схему приближенных и сокращенныхъ вычислений, какъ предлагаемая мною, можно дать въ средней школѣ безъ значительной затраты времени, причемъ эту схему можно дать уже въ среднихъ классахъ гимназій. Этимъ достигается то преимущество, что нѣтъ надобности брать задачи съ подобранными числами. Если же въ старшихъ классахъ есть время и если теорія приближенныхъ вычислений придастъ большое образовательное значеніе, и таковая будетъ проходить, то предварительное практическое ознакомленіе будетъ во всякомъ случаѣ не бесполезно.

Уже въ первомъ классѣ слѣдуетъ дать идею приближенного измѣренія, объяснить и показать, что всякое измѣреніе производится приближенно; при чемъ хорошо на практиче-

скихъ примѣрахъ указать точность измѣренія. Здѣсь обнаружится нецѣлесообразность задачъ, въ которыхъ даны очень сложныя составныя именованныя числа, напр. числа, содержащія берковцы и доли.

Во второмъ классѣ полезно вмѣсто ученія о періодическихъ дробяхъ указать ученикамъ, какъ замѣнить обыкновенную дробь конечной десятичной съ какой угодно степенью точности. Тутъ же можно выяснитъ предѣлы ошибки, которую дѣлаютъ при закругленіи чиселъ. На нѣсколькихъ примѣрахъ слѣдуетъ указать границы, между которыми заключаются результаты дѣйствій съ двумя или нѣсколькими неточными компонентами. Послѣ того, какъ учениками хорошо усвоены дѣйствія надъ десятичными дробями, полезно приучить ихъ отдѣлять въ результатѣ дробную часть, не отсчитывая каждый разъ числа десятичныхъ знаковъ въ компонентахъ; такое умѣніе, полезное вообще, оказывается почти необходимымъ при сокращенныхъ вычисленіяхъ.

Методы сокращеннаго умноженія и дѣленія, которыми ученики вообще очень интересуются, настолько просты, что могутъ быть пройдены уже въ третьемъ классѣ. Въ четвертомъ или пятомъ могутъ быть даны правила, приведенныя выше. Теорія приближенныхъ вычисленій едва ли уместна ранѣе шестого класса. По ознакомленіи съ теоріей, на рядѣ примѣровъ можетъ быть показана справедливость приведенныхъ правилъ.

Правила, предложенныя мною, не представляютъ чего-нибудь существенно новаго. Указанія этого рода есть у проф. Ермакова. Онъ заканчиваетъ брошюру слѣдующимъ замѣчаніемъ: чтобы при умноженіи и дѣленіи приближенныхъ чиселъ получить результатъ съ даннымъ числомъ значащихъ цифръ, нужно въ каждомъ изъ данныхъ чиселъ удержать лишнюю цифру; въ окончательномъ результатѣ лишняя цифра отбрасывается. Это правило приводится только между прочимъ, хотя оно не менѣе строго и не менѣе удобно, чѣмъ основное правило, приведенное имъ ранѣе. Наконецъ, Tripard въ *Revue de l'Enseignement des sciences* за 1909 г. (№ 3) и въ отдѣльной брошюрѣ приводитъ приблизительно тотъ же самый методъ, какъ

предлагаемый мною, не пользуясь однако сокращенными вычислениями. Онъ замѣчаетъ при этомъ: «я привожу этотъ методъ, какъ чисто экспериментальный, и утверждаю, что только въ какихъ-нибудь совершенно исключительныхъ случаяхъ онъ можетъ привести къ неправильному результату».

Т е з и с ы.

Умѣніе вычислять заключается въ умѣніи быстро и вѣрно получить требуемый численный результатъ; то и другое одинаково важно.

I. Для быстрого полученія результата необходима простота вычислений; эта простота достигается методами сокращенныхъ вычислений.

II. Для полученія вѣрнаго результата необходимо умѣніе опредѣлять, на которыя цифры результата можно положиться. основанія теоріи приближенныхъ вычислений даютъ правила, необходимыя для этого.

Такъ какъ средняя школа должна научить вычислять, то методы сокращенныхъ и приближенныхъ вычислений должны быть введены въ курсъ средней школы.

Въ виду практическаго значенія приближенія при всякомъ измѣреніи, ознакомленіе съ приближенными вычислениями слѣдуетъ начинать рано и проводить затѣмъ, постепенно развивая, черезъ весь курсъ средней школы, обращая особенное вниманіе на нихъ при вычисленіи опытныхъ данныхъ.

Вслѣдствіе трудности строгой и полной теоріи приближенныхъ вычислений и разнообразія случаевъ, встречающихся въ задачахъ, для осуществимости проведенія этихъ вычислений въ курсъ средней школы необходимо дать простыя, удобныя практическія правила, пригодныя для всѣхъ случаевъ; при этомъ желательно также указать теоретическія обоснованія этихъ правилъ.

Если приближенные и сокращенныя вычисления будутъ введены въ курсъ средней школы, то всѣ задачи съ подобранными числами должны быть выброшены.

Литература

вопроса о сокращенныхъ и приближенныхъ элементарныхъ
вычисленияхъ.

(Приложение къ докладу В. А. Крогуса).

- A. Cauchy. (C. R. des séances de l'Académie des Sciences de Paris).
Serret. Traité d'Arithmétique 1887.
J. d. Roth Vorlesungen über numerisches Rechnen
Tannery. Leçons d'arithmétique. 1900.
Ch. Halperin-Schaub. Théorie des approximations numériques. 1881
Ruchonnet. Eléments de calcul approximatif. 1887.
Guyon. Note sur les approximations numériques. 1891.
Griess. Approximations numériques. 1898.
Passbindor. Théorie et pratique des approximations numériques. 1906
Langlois. A. Treatise on computation. 1895.
Lambert. Computation and Mesurations 1907.
Xavier. Théorie des approximations numériques et du calcul abrégé. 1900
Vioille. Théorie générale des approximations numériques. 1861
Tripard. Méthode pratique de calcul approximatif. 1893.
Tripard. (Revue de l'enseignement des sciences. 1909. Mars).
Соколовъ. Вычисленіе формулъ по данному приближенію. 1888
Рончаровъ. Приближенные вычисления. 1905
Ермаковъ. Приближенное вычисленіе. 1905.
Долгушинъ. Вычисленія по приближенію. 1908.
Филипповъ. Теорія и практика элементарныхъ приближенныхъ вы-
числений. 1909.

Пренія по докладу В. А. Крогуса.

П. А. Долгушинъ (Кіевъ). „Идея приближенного вычисления очень проста. Возможно знакомить съ такимъ вычисленіемъ и въ низшихъ классахъ средней школы, и даже въ городскихъ училищахъ. Сужденіе о точности результата можно основывать на простомъ понятіи объ измѣняемости результатовъ дѣйствія при измѣленіи компонентвъ. Можно также дать простое правило при рѣшеніи обратной задачи — опредѣленія числа точныхъ цифръ въ компонентахъ для полученія результата съ заданной точностью (см. П. Долгушинъ—«Вычисленія по приближенію», изд. II, 1912 г. § 15)*.

VI. Объ алгебраических преобразованіяхъ.

Докладъ Д. М. Левитуса (Сиб.).

«Цѣль моего доклада—разобраться въ вопросахъ: какова роль алгебраическихъ преобразованій въ школѣ? Въ чемъ недостатки обычнаго способа ихъ изученія? Каковы должны быть приемы этого изученія?

Всякій вопросъ, подлежащій математическому разрѣшенію, заставляетъ преодолѣть слѣдующія трудности: 1) отыскать зависимость между данными величинами; 2) выразить эту зависимость на языкѣ математическихъ символовъ, объ эти трудности могутъ быть преодолены учащимся, если у него было достаточно развито интуитивное чувство функциональной зависимости на первыхъ ступеняхъ обученія и приемы оформленія этой зависимости—на среднихъ ступеняхъ.

Еще одна трудность состоитъ въ слѣдующемъ: найдя зависимость и выразивъ ее символически, надо подвергнуть полученную математическую фразу спеціальной обработкѣ для полученія рѣшенія вопроса. Преодоленіе послѣдней трудности требуетъ умѣнія оперировать надъ алгебраическими выраженіями. Съ этой точки зрѣнія, алгебраическія преобразованія являются инструментомъ, върѣе—необходимымъ наборомъ инструментовъ для математической обработки математическаго матеріала.

Такова роль алгебраическихъ преобразованій въ математикѣ. Ту же роль они должны, конечно, играть и въ школѣ. Но въ школѣ изученіе преобразованій, сверхъ того, должно играть еще другую роль, не менѣе важную, а съ воспитательной точки зрѣнія, быть можетъ, и болѣе важную: всякое алгебраическое преобразование основано на логически обоснованномъ пользованіи нѣкоторыхъ общихъ положеній. Изучая каждое новое преобразование, учащійся упражняется, если въ умѣнии строго логически мыслить,—на первыхъ порахъ—не удастся,—то, во всякомъ случаѣ, въ умѣнии правильно рассуждать. Опираясь надъ абстрактнымъ матеріаломъ, тѣмъ

ментѣ вполне доступнымъ по легкости, ученикъ на задачахъ алгебры постепенно подготовится и къ болѣе труднымъ для него геометрическимъ абстракціямъ. Эта логическая сторона дѣла чрезвычайно важна.

Если бы преобразованія вводились въ школу только какъ матеріалъ для логическихъ упражненій, то отъ учениковъ не надо было бы требовать умѣнія справляться съ преобразованіями, даже несложными.

Достаточно было бы показать, доказать, пояснить нѣсколькими примѣрами и идти дальше. Но разъ преобразованія являются, сверхъ того, практически необходимыми «наборомъ инструментовъ», то надо научить будущихъ мастеровъ пользоваться этимъ наборомъ. Понимать и умѣть—различныя вещи. Школа должна дать и то, и другое.

По умѣніе свободно обращаться съ инструментомъ требуетъ большого навыка, большой практики. На это нужно время. Гдѣ его взять?

На этотъ вопросъ я отвѣчаю, какъ учитель-практикъ. Есть вещи необходимыя и есть только желательныя. Конечно, желательно, чтобы ученикъ зналъ возможно больше. Но еще болѣе желательно, даже необходимо, чтобы онъ зналъ хоть не такъ много, но возможно лучше. Пусть каждый изъ Васъ скажетъ себѣ: не излишни-ли многія упражненія, практикуемыя въ школахъ? Отказъ отъ сложныхъ задачъ дастъ время основательно проработать болѣе простыя. Тѣмъ болѣе, что сложныя задачи не достигаютъ цѣли. Прежде всего—по недостатку времени и по причинѣ слѣпного подчиненія существующимъ учебнымъ планамъ—приходится весьма обширный матеріалъ преобразованій проходить очень быстро въ какіе-нибудь 2 года (3-й и 4-й классы). Ученики не успѣваютъ освоиться съ матеріаломъ, и даже тѣ сложныя задачи, которыя имѣли бы смыслъ по существу, изъ-за этого проходятъ мимо учениковъ въ лучшемъ случаѣ безслѣдно, а въ худшемъ—вызывал отвращеніе къ математикѣ.

Къ концу курса 5-го класса гимназій ученіе о преобразованіяхъ считается законченнымъ. Но я беру на себя смѣлость утверждать, что по окончаніи пяти классовъ учащійся

преобразованиями не владѣеть и ихъ не понимаетъ—за нѣкоторыми, конечно, исключеніями. Развѣ не изъ-за этого получается столь большой процентъ учениковъ, слабыхъ въ алгебрѣ? А въ результатѣ—такъ называемыя, привычныя ошибки учениковъ старшихъ классовъ.

Результаты, которыхъ достигаетъ школа по части умѣнія учениковъ выполнять алгебраическія преобразования, мнѣ кажутся скучными по сравненію съ количествомъ труда, затраченного учениками. А если однимъ изъ этихъ результатовъ является непріязненное отношеніе къ математикѣ, то такіе результаты надо признать весьма плачевными.

Періодъ изученія преобразованій долженъ быть значительно увеличенъ. Нѣкоторыя болѣе сложныя преобразования могутъ впервые изучаться даже въ послѣднемъ классѣ. Весь матеріалъ долженъ быть перераспредѣленъ съ методическихъ точекъ зрѣнія. Упражненія, продѣлываемыя учениками, должны рѣзко распадаться на два типа: первый типъ—упражненія, предшествующія или сопутствующія изученію матеріала. Ихъ отличительною чертою должна быть крайняя простота, чтобы техническія трудности были несравнимо ниже трудностей логическихъ. Что же касается послѣднихъ, то и онѣ должны увеличиваться лишь въ строгой и осторожной постепенности.

Упражненія, преслѣдующія усвоеніе новаго матеріала, не должны одновременно служить другимъ цѣлямъ: это усложнитъ ихъ, а потому сдѣлаетъ ихъ для главной цѣли мало пригодными.

Второй типъ упражненій, по моему плану, долженъ преслѣдовать цѣли укрѣпленія изученнаго и развитія, какъ техники отдѣльныхъ простыхъ преобразованій, такъ и умѣнія ориентироваться въ болѣе сложныхъ комбинаціяхъ.

Но какъ этого достичь? Вѣдь тотъ весьма значительный трудъ, котораго требуютъ теперь отъ учениковъ въ области алгебраическихъ преобразованій, имѣетъ ввиду не что иное, какъ развитіе техники преобразованій.

Каждый изъ насъ знаетъ, какъ достигается бѣглость при игрѣ на музыкальномъ инструментѣ. Развитіе техники алге-

браческѣхъ преобразованій можетъ быть достигнуто тѣми же средствами: надо избрать путь ежедневныхъ или, хотя бы, болѣе рѣдкихъ, но регулярно выполняемыхъ особѣхъ упражненій, такъ сказать, математическихъ гаммъ, математическихъ этюдовъ.

Особый задачникъ, который я называлъ бы «задачникомъ на каждый день», рисуется мнѣ въ такомъ видѣ: на каждый день ученикъ получаетъ небольшой цѣкъ задачъ на преобразование (сюда я отношу и рѣшеніе уравненій), отнимающей отъ 5 до 10 минутъ. Такой цѣкъ долженъ быть вполнѣ законченъ. Начиная съ очень простой темы, постепенно развивать ее въ какое-нибудь сложное преобразование.

Вотъ примѣръ нѣсколькихъ цикловъ задачъ, начинающихся съ одного и того же образованія, служащаго темою:

1) отъ примѣненія формулы для $(a+b)^3$ перейти къ вычисленію квадратовъ двузначныхъ чиселъ типа 31, 79 и т. д.

2) Отъ той-же формулы перейти къ формулѣ для $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ и т. д.

3) Отъ той же формулы — къ формулѣ возведенія многочлена въ квадратъ.

4) Отъ той же формулы — къ разложенію квадр. трехчлена на линейныхъ множителей, и т. д.

Но недостаточно только сдѣлать работу. Надо уметь выполнять ее изящно. И при обученіи математикѣ нельзя упускать изъ виду эстетическаго элемента. А чтобы научить ученика изящнымъ приѣмамъ преобразованій, надо развивать въ немъ чувство изящнаго и на урокахъ математики; надо знакомить его съ изящными классическими примѣрами преобразованій.

Интересно отмѣтить слѣдующее: всѣ изящныя преобразованія — крайне просты. Всѣ важнѣйшія преобразованія, встречающіяся въ высшемъ курсѣ математики — просты и изящны.

Только простой матеріалъ для упражненій научить учениковъ владѣть каждымъ инструментомъ и уметь выбрать изъ своего набора инструментовъ тотъ, который наиболее пригоденъ для предстоящей работы.

Въ связи съ вышеизложеннымъ позволяю себѣ особенно

обратить ваше вниманіе на то зло, которое происходитъ отъ столь распространенныхъ такъ называемыхъ -- привычныхъ ученическихъ ошибокъ.

Господа! Такіхъ привычныхъ ошибокъ масса. По условіямъ своей работы, я имѣлъ возможность, несмотря на короткий испытательный періодъ своей педагогической дѣятельности, ознакомиться съ позаніями нѣсколькихъ тысячъ молодыхъ людей.

Много сотенъ ежегодно отпадаетъ отъ средней школы изъ-за неуспѣшности въ математикѣ; много народу пронападаетъ для работы, такъ или иначе связанной съ математикою.

Надо помочь тѣмъ, кто отсталъ отъ товарищей не по одной только своей небрежности. Чтобы избавить нашихъ учениковъ отъ привычныхъ ошибокъ, нужны особые мѣры.

Учитель старшихъ классовъ не можетъ удѣлять такимъ отстающимъ ученикамъ особаго времени: у него каждая минута на счету. Надѣяться на репетиторовъ нельзя.

Вопросу о привычныхъ ученическихъ ошибкахъ должны быть посвящены особые труды, составлены особые, такъ сказать, цѣлительные задачникъ. Я предполагаю въ ближайшемъ времени начать разработку именно этого вопроса, и очень прошу всѣхъ, кто сочувствуетъ такому моему начинанію, подѣлиться со мною матеріалами, присылая ихъ на мое имя сюда, въ Педагогическій Музей военно-учебныхъ заведеній».

Т е з и с ы.

Преобразование — одинъ изъ важнѣйшихъ инструментовъ математическаго изслѣдованія. Учить преобразованиямъ необходимо такъ, чтобы изучившій ихъ въ совершенствѣ владѣлъ этимъ инструментомъ при производствѣ несложныхъ операций. Обученіе преобразованиямъ возможно лишь путемъ долгихъ систематическихъ упражненій. Поэтому, съ цѣлью экономіи времени, необходимо сократить объемъ изучаемыхъ преобразованій. Критерій при рѣшеніи вопроса о томъ, что нужно и что не нужно, могъ-бы быть такой: преобразования, съ которыми не приходится имѣть дѣла на математическомъ факультетѣ уни-

верситета, спокойно могутъ быть исключены изъ программы средней школы.

Метода обученія преобразованіямъ должна быть основана на долгихъ упражненіяхъ надъ простымъ и прозрачнымъ матеріаломъ. Искусственно запутаннымъ примѣрамъ не должно отводиться никакого мѣста въ школѣ.

Полезно было-бы созданіе особаго сборника упражненій «на каждый день», который имѣлъ-бы ввиду развитіе техники преобразованій.

При плохомъ изученіи преобразованій въ среднихъ классахъ ученики старшихъ классовъ часто допускаютъ ошибки. Необходимо изучить эти привычныя ошибки и создать особый сборникъ упражненій, котораго цѣлью было-бы искорененіе этихъ ошибокъ у учениковъ старшихъ классовъ. Докладчикъ проситъ доставлять ему матеріалы по вопросу о привычныхъ ошибкахъ.

Третье засѣданіе.

29 декабря, 8 час. веч.

VII. Спорные вопросы въ методикѣ ариметики.

Докладъ О. А. Эрн а (Рига).

«Было время, когда методика ариметики считалась вполне опредѣлившейся дисциплиной, когда Калласъ въ предисловіи къ своей «Методикѣ элементарнаго обученія ариметикѣ» утверждалъ, что «методика начальной ариметики является основнымъ и наиболѣе блестящимъ предметомъ въ курсѣ учительскихъ семинарій, что на такую высоту вознесли ее труды нѣмецкихъ методистовъ, начиная съ Песталоцци и кончая Генчелемъ, что предметъ этотъ по своему объему и содержанію вполне законченъ, и что дальше по пути, указанному Генчелемъ и его предшественниками, идти некуда и неслѣдуетъ».

Въ настоящее время врядъ-ли кто-либо изъ преподавателей ариметики согласится съ этимъ взглядомъ Калласа; гораздо больше приверженцевъ окажется, вѣроятно, у мнѣнія, высказаннаго почти одновременно съ Калласомъ, извѣстнымъ методистомъ Беетцомъ, согласно которому, «выборъ и распредѣленіе матеріала, самое изложеніе, однимъ словомъ, вся метода обученія ариметикѣ не представляетъ собою ничего единаго и однообразнаго; каждому взгляду противопоставляется другой, прямо противоположный; противорѣчіе царитъ въ самыхъ простыхъ вопросахъ».

И въ самомъ дѣлѣ: нельзя-же современную методику ариметики признавать вполне опредѣлившейся дисциплиной,

разъ такіе кардинальные вопросы, какъ вопросы о цѣли преподаванія арифметики въ школахъ, объ объемѣ и характерѣ курса, наконецъ, о методахъ и приемахъ обученія, все еще недостаточно выяснены и рѣшаются современными методистами часто въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ.

Но, соглашались иногда съ мнѣніемъ Беттца о недостаточномъ развитіи методики арифметики, нужно вмѣстѣ съ тѣмъ отнестись въ высшей степени осторожно къ объясненію причинъ этого явленія. Какъ извѣстно, въ своей брошюрѣ «Сущность числа» Беттцъ объясняетъ существованіе противорѣчій и спорныхъ вопросовъ въ методикѣ арифметики гдѣмъ обстоятельствомъ, что все ученіе о преподаваніи арифметики не объединено одной идеей, что оно не покоится на одномъ основномъ принципі, изъ котораго всѣ методическія положенія могли-бы быть выведены чисто-дедуктивнымъ путемъ.

Насколько правиленъ этотъ взглядъ о необходимости дедуктивнаго, чисто теоретическаго построенія методики арифметики, можно будетъ судить лишь послѣ болѣе подробнаго изслѣдованія характера тѣхъ спорныхъ вопросовъ и противорѣчій, которые въ настоящее время бросаются въ глаза еще рѣзче, чѣмъ 20 лѣтъ тому назадъ.

Какъ только-что было указано, спорные вопросы возникаютъ сразу при опредѣленіи цѣли преподаванія арифметики. Разумѣется, чистыхъ Песталоцціанцевъ, смотрящихъ на арифметику и математику вообще только какъ на прикладную логику и признающихъ исключительно формальныя цѣли преподаванія арифметики, въ настоящее время уже почти не встрѣчается; но все же въ пониманіи цѣли и задачъ обученія арифметикѣ мы наблюдаемъ очень существенныя разпоклонія. Въ то время, какъ одни методисты не признають за обученіемъ арифметикѣ почти никакого развивающаго значенія и отрицають, какъ будто, по крайней мѣрѣ, на первыхъ порахъ обученія, формальныя цѣли, другіе лишь отодвигаютъ формальное развитіе учащихся на задній планъ и подчиняють формальныя цѣли матеріальной. При этомъ большинство методистовъ послѣдней категоріи стараются связать арифметику какъ можно прочнѣе съ жизнью или съ другими предметами преподаванія,

придать ей, такимъ образомъ, прикладной характеръ. Но при рѣшеніи вопроса, что понимать подъ прикладнымъ характеромъ, снова возникаютъ разногласія и выдвигаются различные точки зрѣнія. Д-ръ Гартманъ, д-ръ Рейнъ и другіе представители Гербартъ-Циллеровской школы видятъ все спасеніе въ расположеніи учебнаго матеріала по, такъ называемымъ, «предметнымъ областямъ» (Sachgebiete). При этомъ они руководятся исключительно интересомъ учащихся и ихъ «кругомъ представленій», по мѣрѣ расширенія котораго, расширяется и матеріалъ, разрабатываемый на урокахъ арифметики. Центромъ тяжести такого курса является практическое ознакомленіе учащихся съ мѣрами и монетами и простѣйшими, доступными дѣтскому пониманію, случаями измѣренія и вычисленія стоимости при покупкѣ и продажѣ различныхъ предметовъ. Другіе методисты, желая придать арифметикѣ прикладной характеръ, превращаютъ ее въ рѣшеніе задачъ—иногда очень сложныхъ и трудныхъ—на коммерческія и финансовыя вычисленія. Третьи стараются установить возможно прочную связь между арифметикой и геометрией, причемъ иногда эта связь оказывается настолько неразрывной, что арифметика теряетъ совсѣмъ характеръ самостоятельнаго учебнаго предмета и является лишь средствомъ для изслѣдованія числовыхъ отношеній въ геометрическихъ вопросахъ.

Новѣйшее «реформистское» направленіе въ методикѣ арифметики тоже всецѣло подчиняетъ формальную цѣль материальной и полагаетъ, что обученіе, которое съ самаго начала поставитъ себѣ цѣлью побудить ученика къ усвоенію извѣстнаго математическаго матеріала, можетъ спокойно ожидать тѣхъ побочныхъ формально-развивающихъ результатовъ, которые должны явиться слѣдствіемъ такого обученія (Алоизіи Гесфьеръ). Эти реформаторы въ качествѣ звена, связующаго арифметику съ жизнью—вообще, а съ наукой и техникой—въ особенности, усиленно рекомендуютъ усвоеніе учащимися идеи функциональной зависимости и воспитанія въ нихъ навыка къ мышленію въ области функцій (functionales Denken). (См. Меранскую программу). Разумѣется, надлежащее пониманіе функцій и ихъ значенія въ математикѣ возможно только въ старшихъ

классахъ средней школы, но, по мнѣнію многихъ методистовъ, уже средніе и даже младшіе классы средней школы даютъ достаточно матеріала для подготовки учащихся къ усвоенію идеи функціональной зависимости. Въ области ариметики въ этомъ отношеніи большое значеніе могло-бы имѣть умѣлое и своевременное выясненіе учащимся понятія о прямой и обратной пропорціональности величинъ, сопровождаемое указаніемъ тѣхъ случаевъ, когда между величинами существуетъ болѣе сложная зависимость. Эти зависимости должны наглядно демонстрироваться путемъ черченія различныхъ графикъ. Это стремленіе подготовить учащихся уже на первыхъ ступеняхъ обученія къ пониманію функціональной зависимости проникло въ послѣдніе годы и въ русскую учебную литературу. Появившаяся недавно методика ариметики г. Галанина отводитъ этому вопросу видное мѣсто даже въ первомъ году обученія. Здѣсь идея прямой пропорціональности выясняется дѣтямъ при помощи опредѣленія измѣненій въ вѣсѣ, объемѣ, стоимости различныхъ предметовъ, путемъ фактическаго измѣренія и вычисленія, производимыхъ самими учениками. Авторы известной книги «Педагогика математики», г.г. Мроченъ и Флипповичъ, указываютъ на изслѣдованія свойствъ членовъ арифметическихъ дѣйствій и даже на составленіе такъ называемыхъ волшебныхъ квадратовъ, какъ на упражненія, способствующія выясненію функціональной зависимости.

Но, конечно, и здѣсь возможны увлеченія, и увлеченія очень вредныя. Знатокъ нѣмецкой методики, проф. Гофлеръ, вполне раздѣляя въ общемъ взгляды, высказанные въ Мерапской программѣ, въ тоже время настойчиво совѣтуетъ не слѣдить съ выясненіемъ функціональной зависимости и не навязывать дѣтямъ въ курсѣ арифметики понятій и идей, имъ недоступныхъ. И здѣсь, какъ вездѣ въ арифметикѣ, мышленіе въ области функцій должно опираться на наблюденіе и опытъ надъ измѣняемостью переменныхъ; поэтому онъ строго различаетъ «functionales Denken» отъ «functionales Anschauen».

Если, такимъ образомъ, нельзя считать вполне рѣшеннымъ вопросъ о дѣлѣ преподаванія арифметики, то объемъ курса

арифметики и его характеръ вызываютъ еще больше разногласій между современными методистами. — Очень много спорныхъ вопросовъ возникаетъ въ самомъ началѣ обученія. вследствие противорѣчивыхъ взглядовъ на сущность и природу числа. Въ Германіи, какъ извѣстно, чуть не сто лѣтъ идетъ борьба между сторонниками теоріи счета и теоріи непосредственнаго воспріятія числа или числовыхъ представлений. Последніе полагаютъ, что понятіе о числѣ возникаетъ опытнымъ путемъ, причемъ главную роль играетъ наблюденіе, при помощи органовъ внѣшнихъ чувствъ, небольшихъ совокупностей или группъ предметовъ, сравненіе ихъ между собой и т. д. Понятіе о числѣ будетъ отчетливымъ и яснымъ, когда отдѣльныя единицы, входящія въ составъ его, будутъ выдѣлены, такъ называемымъ, постулированіемъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ всѣ эти единицы будутъ мыслиться, какъ одно цѣлое. Но постулированіе это совершается, будто-бы, безъ всякаго участія счета, лишь путемъ всесторонняго наблюденія совокупности. Представители другого направленія полагаютъ, что понятіе о числѣ есть результатъ особаго психическаго акта, называемаго счетомъ; только путемъ наблюденія это понятіе не можетъ возникнуть, такъ какъ наблюдать и представлять мы можемъ только конкретныя совокупности, а не число. Поэтому для сторонниковъ теоріи счета каждое число есть не отдѣльная группа единицъ, совместно и одновременно воспринимаемыхъ нами путемъ наблюденія, а тотъ или другой членъ цѣлаго ряда, изъ которыхъ каждый послѣдующій получается изъ предыдущаго путемъ прибавленія къ нему одной единицы. У насъ въ Россіи почти всѣ методисты были сторонниками теоріи счета, но за послѣдніе годы послѣ появленія сочиненій д-ра Дайля, виднаго представителя теоріи непосредственнаго воспріятія числа, и у насъ появились послѣдователи этой теоріи.

Само собой разумѣется, что разногласіе во взглядахъ на сущность и возникновеніе числа вызываетъ разногласіе въ построеніи всего курса арифметики и въ пріемахъ преподаванія на первыхъ-же ступеняхъ обученія. Спорнымъ является, напр., вопросъ о значеніи и характерѣ наглядныхъ пособій. Для

сторонниковъ теоріи счета важно научить учениковъ, какъ можно скорѣе, считать вѣрно и сознательно; этому можно научить на какихъ угодно предметахъ, располагаемыхъ въ рядѣ, поэтому для методистовъ этого направленія видъ и форма наглядныхъ пособій не играетъ большой роли. Для представителей теоріи непосредственнаго воспріятія важнѣе не счетъ, а то впечатлѣніе, которое производитъ известная группа предметовъ на видиміе органы учащихся; поэтому у нихъ излюбленными наглядными пособиями являются, такъ называемыя, числовыя фигуры, въ видѣ-ли группъ точекъ или кружочковъ, расположенныхъ совершенно определеннымъ образомъ, или въ видѣ такихъ-же группъ шаровъ (счетный приборъ д-ра Майя).

Различно рѣшается и вопросъ о томъ, когда слѣдуетъ ознакомить учащихся съ цифрами. Для сторонниковъ теоріи непосредственнаго воспріятія числа важно продержаться дѣтей, какъ можно дольше, на наблюдении и изученіи реальныхъ совокупностей или числовыхъ фигуръ. Всякій символъ, условно обозначающій то или другое число, съ ихъ точки зрѣнія, прерываетъ тотъ правильный и послѣдовательный ходъ работы, который совершается въ сознаніи дѣтей при изученіи числовыхъ фигуръ, внести въ эту работу новый элементъ, чуждый наглядности, требующій известнаго навыка въ отвѣщенномъ мышленіи. Поэтому многіе методисты этой школы отодвигаютъ знакомство съ цифрами до болѣе поздняго времени. Сторонники теоріи счета не боятся вводить цифры въ самое начало обученія, потому что не боятся символистски вообще; такъ какъ для нихъ центръ тяжести всего обученія лежитъ въ счетѣ, а счетъ основанъ на твердомъ знаніи порядка названій чиселъ натуральнаго рода, то имъ, все равно, приходится пользоваться символами. самыя числительныя имена являются, вѣдь, такими-же символами, только условно замѣняющими числа. Наконецъ, при переходѣ къ арифметическимъ дѣйствіямъ разниця между построеніемъ курса становится еще болѣе замѣтной. Послѣдователи теоріи счета кладутъ счетъ и въ основу производства всѣхъ дѣйствій; результаты этихъ дѣйствій они находятъ путемъ присчитыванія или отсчитыванія

единицами или группами единиц; поэтому они тотчасъ послѣ усвоенія счета переходятъ къ, такъ называемому, изученію дѣйствій по тому или другому плану. Совершенно иначе обстоятъ дѣло сторонниковъ другой теоріи. Имъ тоже приходится встрѣчаться съ арифметическими дѣйствіями въ самомъ началѣ обученія. Имъ нужно, вѣдь, прежде всего выработать въ учащихся отчетливое понятіе (или даже представленіе) о каждомъ числѣ путемъ сравненія различныхъ чиселъ между собою; для этого нужно объяснить составъ числа изъ слагаемыхъ или множителей, а для этого нужно производить арифметическія дѣйствія. Такимъ образомъ, здѣсь арифметическія дѣйствія важны не сами по себѣ; они являются лишь средствомъ для изученія состава чиселъ изъ слагаемыхъ и множителей. Поэтому въ основѣ курса методистовъ этого направленія лежитъ не изученіе дѣйствій, а, такъ, называемое изученіе чиселъ.

Впрочемъ, въ области арифметическихъ дѣйствій встрѣчается много спорныхъ, съ методической точки зрѣнія, вопросовъ и независимо отъ различія въ пониманіи сущности числа. Прежде всего, вѣдь, до сихъ поръ не установлено точное число арифметическихъ дѣйствій. Правда, средневѣковая удвоеніе и дѣленіе пополамъ канули въ вѣчность, но и до сихъ поръ многіе нѣмецкіе методисты признаютъ за самостоятельными арифметическія дѣйствія нѣкоторые виды и особые случаи вычитанія и дѣленія, какъ-то: сравненіе, различеніе, измѣреніе и т. д. Много разногласій возбуждаютъ и вопросы о порядкѣ и послѣдовательности въ изученіи дѣйствій и о приѣмахъ объясненія самой сущности этихъ дѣйствій. Одни считаютъ нужнымъ познакомить дѣтей сразу со всѣми случаями примѣненія того или другого дѣйствія, другіе рекомендуютъ въ этомъ отношеніи строгую постепенность и послѣдовательность, третьи думаютъ, что нѣкоторые виды дѣйствій совсѣмъ не подлежатъ разсмотрѣнію въ элементарномъ курсѣ; одни считаютъ, напр., дѣленіе на равныя части болѣе простымъ и доступнымъ дѣтскому пониманію видомъ дѣленія, чѣмъ кратное сравненіе. Другіе, наоборотъ, предлагаютъ начинать именно съ дѣленія по содержанію, третьи стараются убѣдить, что всякіе «виды» дѣленія только путаютъ и затрудняютъ дѣтей и что гораздо

проще выслнить общее понятіе о дѣленіи, какъ о дѣйстви, обратномъ умноженію; далѣе, одни находятъ возможнымъ уже на первой ступени обученія ознакомить дѣтей со всѣми четырьмя дѣйствіями, другіе отодвигаютъ изученіе умноженія и дѣленія на болѣе позднее время, а при изученіи дѣйствій въ предѣлѣхъ перваго десятка ограничиваются сложеніемъ и вычитаніемъ.

Наконецъ, и приемы изученія производства дѣйствій нельзя считать опредѣленно установленными. Знакомить-ли дѣтей съ однимъ какимъ-либо способомъ производства дѣйствія или съ различными? Производить-ли вычитаніе при помощи отчитыванія или досчитыванія?

Какіе приемы сокращеннаго производства дѣйствій должны быть усвоены учащимися?

Эти и многіе другіе вопросы изъ той-же области до сихъ поръ рѣшаются методистами различно.

Но, конечно, разногласія и противорѣчія проявляются не только въ области изученія арифметическихъ дѣйствій. Ихъ можно констатировать и въ любомъ отдѣлѣ современной арифметики. Рѣшеніе задачъ, напр., огромнымъ большинствомъ методистовъ признается центромъ тяжести всей элементарной арифметики, а между тѣмъ, въ вопросахъ о выборѣ задачъ, о приемахъ ихъ рѣшенія, даже о роли задачъ въ курсѣ арифметики есть много невыясненнаго, спорнаго, неопредѣлывающагося. Взять хотя бы вопросъ о такъ называемомъ, распредѣленіи задачъ по типамъ. Во многіхъ сборникахъ задачъ повѣйнаго происхожденія такое расположеніе задачъ усиленно рекомендуется и какихъ только, подчасъ въ высшей степени странныхъ, типовъ здѣсь не встрѣчается. Съ другой стороны, многіе видные методисты энергично высказываются противъ рѣшенія задачъ по типамъ, такъ какъ такое рѣшеніе приучаетъ дѣтей къ пользованію шаблономъ и возвращаетъ насъ почти въ обстановку средне-вѣковой школы съ ея задачами на ложное дѣленіе и пр. правила. Къ типичнымъ задачамъ близко примыкаютъ задачи, такъ называемаго алгебраическаго характера. И въ этой области тоже достаточно спорныхъ пунктовъ. Прежде всего не установлены точно признаки, по которымъ задачи алгебраическаго харак-

тера отличаются отъ чисто-арифметическихъ. Затѣмъ далеко не одинаково оцѣнивается и роль этихъ задачъ въ курсѣ арифметики. Большинство методистовъ, принимая во вниманіе искусственность задачъ алгебраическаго характера, ихъ оторванность отъ жизни, предлагаетъ совсѣмъ исключить ихъ изъ курса арифметики и перенести въ курсъ алгебры, тѣмъ болѣе что составленіемъ уравненій задачи этого рода рѣшаются гораздо проще, чѣмъ искусственнымъ арифметическимъ путемъ. Съ другой стороны, однако, именно за послѣднее время начинаютъ въ большомъ количествѣ появляться сборники задачъ алгебраическаго характера или задачъ-загадокъ, требующихъ для своего рѣшенія особаго рода смекалки или соображенія. Наконецъ, и пріемы рѣшенія сложныхъ арифметическихъ задачъ нельзя считать окончательно установленными. Нужно ли знакомить учащихся съ такъ называемымъ, аналитическимъ приемомъ рѣшенія задачъ и если нужно, то на какой ступени обученія, и въ какомъ отношеніи это аналитическое рѣшеніе задачъ должно находиться къ обычному систематическому приему?

Изъ другихъ спорныхъ вопросовъ останавлиюсь еще и на вопросахъ объ именованныхъ числахъ и дробяхъ. Въдѣ именованные числа до сихъ поръ не могутъ найти своего мѣста въ курсѣ арифметики. Одни методисты все еще признаютъ нужнымъ выдѣлить изученіе дѣйствій надъ именованными числами въ особый отдѣлъ, тогда какъ другіе усиленно рекомендуютъ разсматривать дѣйствія надъ этими числами параллельно съ дѣйствіями надъ отвлеченными, пріурочивая раздробленіе и превращеніе составныхъ именованныхъ чиселъ къ изученію умноженія и дѣленія.

Въ области дробей я не стану разсматривать всѣмъ и вѣстныхъ разногласій относительно объясненія умноженія дѣленія на дробь и останавлиюсь только на вопросѣ о послѣдовательности, въ какой учащіеся должны быть ознакомлены съ дробями: начинать-ли съ обыкновенныхъ дробей и отъ нихъ переходить къ десятичнымъ или наоборотъ? Въ русскихъ школахъ до сихъ поръ почти всегда обыкновенныя дроби прѣходятся раньше десятичныхъ, а послѣднія разсматриваютъ

какъ частный случай обыкновенныхъ дробей. Такое построение курса оправдывается тѣмъ, что понятія о десятой, сотой, тысячной гораздо труднѣе выяснить дѣтямъ, чѣмъ понятія о половинѣ, трети, четверти, которыя могутъ быть получены непосредственнымъ, нагляднымъ дѣленіемъ отдѣльнаго предмета на равныя части; кромѣ того, и въ практической жизни несравненно чаще приходится встрѣчаться съ дробями, выраженными въ половинахъ, четвертяхъ, восьмыхъ, чѣмъ съ такими мелкими долями, какъ сотыя и тысячныя. Въ нѣмецкой методической литературѣ существуетъ, однако, и другое направленіе: д-ръ Гартманъ, д-ръ Рейнгъ и другіе настаиваютъ на изученіи десятичныхъ дробей тотчасъ послѣ ознакомленія съ дѣйствіями надъ цѣлыми числами, указывая на то, что десятичныя дроби по своему составу и по способу обозначенія гораздо ближе подходятъ къ цѣлымъ числамъ, чѣмъ къ обыкновеннымъ дробямъ, которыя по своему составу нѣз долей не принадлежатъ къ числамъ десятичной системы. Поэтому на десятичныя дроби можно смотрѣть, какъ на особый видъ десятичныхъ чиселъ. Впрочемъ, и среди нѣмцевъ далеко не всѣ соглашались съ такимъ распредѣленіемъ матеріаловъ въ курсѣ дробей. Такъ, напр., извѣстный методистъ Симонъ находить такой планъ обученія апалогичнымъ плану обученія письму, начинающемуся со стенографіи. Онъ приводитъ 7 доводовъ противъ прохожденія десятичныхъ дробей раньше обыкновенныхъ; изъ нихъ наиболѣе существенныя указываютъ на невозможность при такомъ порядкѣ курса выяснить надлежащимъ образомъ сущность умноженія и дѣленія на дробь и на несоотвѣтствіе такого порядка курса историческому развитію ученія о дробяхъ. Новѣйшее реформистское направленіе въ методикѣ арифметики, въ лицѣ проф. Гёфлера, предлагаетъ такой планъ: Въ I годъ обученія (въ средней школѣ) проходятся дѣйствія надъ цѣлыми числами и надъ десятичными дробями, рассматриваемыми какъ десятичныя числа; объясненіе производства всѣхъ дѣйствій при этомъ основывается единственно на распространеніи принципа помѣстнаго значенія цифры и на десятичныхъ дробяхъ. Затѣмъ проходитъ подготовительный курсъ обыкновенныхъ дробей, который имѣетъ

цѣлью чисто нагляднымъ путемъ, безъ всякой теоріи, познакомить учащихся съ простѣйшими дробями и дѣйствіями надъ ними. Когда, благодаря этому курсу, выяснится понятіе о дробѣ, возвращаются снова къ десятичнымъ дробямъ и рассматриваютъ ихъ уже не только какъ числа, составленные по десятичной системѣ, но и какъ дроби. Во II годъ обученія проходится систематическій курсъ обыкновенныхъ дробей, которому предшосылается краткое учене о дѣлителяхъ и кратномъ. За послѣднее время и въ русскую методикъ начинается проникать стремленіе поставить десятичныя дроби въ курсѣ ариметики раньше обыкновенныхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ значительно сократить теорію дробей вообще. Такъ, г.г. Мрочекъ и Филипповичъ предлагаютъ въ первомъ циклѣ познакомить дѣтей съ простѣйшими случаями дробленія конкретныхъ единицъ и чисто нагляднымъ путемъ научить дѣйствіямъ съ простѣйшими дробями; во второмъ циклѣ проходятся дѣйствія надъ конечными десятичными дробями, какъ надъ десятичными числами; въ III циклѣ, наконецъ, излагается не теорія обыкновенныхъ дробей, а лишь условныя опредѣленія оперированія съ символомъ $\frac{a}{b}$.—Во всякомъ случаѣ, и въ этомъ вопросѣ о курсѣ дробей много спорнаго и не выясненнаго.

Чтобы покончить съ разногласіями по вопросу объ объемѣ курса, нужно сказать еще нѣсколько словъ о тѣхъ сокращеніяхъ въ курсѣ ариметики и дополненіяхъ къ нему, которыя предлагаются съ разныхъ сторонъ. Что касается сокращеній, то исключеніе изъ курса статьи о нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя путемъ послѣдовательнаго дѣленія, цѣннаго правила и правила учета векселей требуется довольно единодушно уже давно почти всѣми методистами и преподавателями математики. Но за послѣднее время къ этимъ требованіямъ присоединились еще новыя, которыя раздѣляются уже далеко не всѣми: сюда относится исключеніе изъ ариметики всѣхъ такъ наз. спеціальныхъ правилъ, всей статьи о дѣлимости, о кратномъ и дѣлителяхъ и, наконецъ, значительное сокращеніе теоріи дробей. Взаимнѣ того, различные авторы предлагаютъ дополнить курсъ ариметики введеніемъ статьи о прогрессіяхъ,

широкимъ примѣненіемъ графиковъ при рѣшеніи задачъ и т. д.; другіе рекомендуютъ при всякомъ удобномъ случаѣ пользоваться арифметикой для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ и такимъ образомъ дополнить курсъ арифметики пропедевтическимъ курсомъ геометріи; третьи считаютъ возможнымъ уже въ арифметикѣ обобщать понятіе о числѣ и знакомить дѣтей съ отрицательными числами...

Методы и приемы обученія тоже нельзя считать установленными и опредѣленными. Правда, такой общій принципъ, какъ принципъ наглядности обученія, не возбуждаетъ въ настоящее время самъ по себѣ уже никакого сомнѣнія; но относительно примѣненія этого принципа на дѣлѣ и въ теоріи методики, и на практикѣ приходится наблюдать еще много разногласій; рядомъ съ требованіями самаго широкаго примѣненія наглядности приходится слышать упреки въ томъ, что наглядное обученіе заходитъ слишкомъ далеко и пріучая дѣтей познавать все вышшими чувствами, не даетъ имъ матеріала для упражненія въ отвлеченномъ мышленіи. А за послѣднее время все чаще и чаще слышался голосъ, неудовлетворяющіеся одной наглядностью при обученіи и рекомендуящіе замѣну нагляднаго метода — лабораторнымъ. Сущность лабораторнаго метода, такъ широко распространеннаго въ школахъ Америки и понемногу проникающаго и къ намъ, состоитъ, какъ извѣстно, въ томъ, что учащіеся должны не только наблюдать по указанію учителя тѣ или другія наглядныя пособія, но должны сами экспериментировать съ ними, еще лучше сами создавать эти пособія.

Учащимся раздаются на руки простѣйшія наглядныя пособія и матеріалъ для изготовленія другихъ пособій, необходимыхъ для уроковъ арифметики, и классъ превращается такимъ образомъ въ лабораторію. Съ педагогической точки зрѣнія, лабораторная метода имѣетъ значительныя преимущества передъ наглядной, такъ какъ при лабораторныхъ занятіяхъ учащіеся принимаютъ активное участіе въ работѣ, а не только слушаютъ и воспринимаютъ объясненія учителя; самостоятельная работа возбуждаетъ въ нихъ интересъ къ занятиямъ арифметикой и даетъ имъ возможность проявить твор-

ческія силы. Лабораторная метода можетъ быть обоснована и признана удачною и на основаніи новѣйшихъ ученій психологій, согласно которымъ наше мышленіе тѣсно соприкасается съ областью ощущеній и впечатлѣній. Чѣмъ больше органовъ чувствъ участвуютъ въ воспріятіи ощущеній при соприкосновеніи съ вѣнчимъ міромъ, тѣмъ отчетливѣе, яслиѣе и ярче познания въ нашемъ сознаніи представленія, тѣмъ легче переходъ отъ представлений къ общимъ понятіямъ, тѣмъ правльнѣе происходитъ процессъ мышленія. — Съ другой стороны, нѣкоторые педагогич-практики приводятъ довольно существенныя возраженія противъ нрокаго примѣненія лабораторныхъ занятій: эти занятія требуютъ прежде всего большой затраты матеріальныхъ средствъ, совершенно непосильной для большинства нашихъ школъ; они требуютъ много мѣста въ классѣ и, пожалуй, устройства особой классной мебели; на эти занятія затрачивается слишкомъ много времени и, наконецъ, если ихъ не разнообразить постоянно, они могутъ также скоро наскучить ученикамъ, какъ всякія другія повторяемыя изо дня въ день упражненія.

Говоря о методахъ и приемахъ обученія, нельзя обойти молчаніемъ и различнаго отношенія преподавателей и методистовъ къ примѣненію индукціи и дедукціи при обученіи арифметикѣ. Разумѣется, приемы старой школы, въ которой все шлось дедуктивно отъ усвоения наззуть общихъ опредѣленій и правилъ къ примѣненію этихъ общихъ истинъ къ отдѣльнымъ частнымъ случаямъ — осуждены въ настоящее время единогласно. Зато теперь проявляется другая крайность: приходится встрѣчаться съ мнѣніемъ, будто при обученіи арифметикѣ должны примѣняться только такіе приемы и упражненія, которые допускаютъ индуктивный ходъ мыслей учащихся. Это мнѣніе я позволяю себѣ назвать крайностью, потому что очевидно, что насколько индукція пригодна для выработки общихъ понятій, открытія новыхъ законовъ и формулировка общихъ правилъ, настолько-же дедукція необходима для примѣненія этихъ общихъ истинъ къ частнымъ случаямъ. Но открытіе и усвоеніе общихъ истинъ (теорія арифметики) и примѣненіе этихъ истинъ (практика) при обученіи арифметикѣ тѣсно соприкасаются и пере-

ишлется между собой; поэтому можетъ случиться, что частный фактъ, подводимый подъ пазвѣстную общую категорию, самъ вмѣстѣ съ тѣмъ получаетъ значение общей истины, становится общимъ правиломъ. Такъ, напр., применяя общее перемѣнительное свойство умноженія къ частнымъ случаямъ умноженія на 10, 100, 1000 и т. д., учащіеся могутъ найти общее правило умноженія на разрядную единицу. Значить, дедукція пригодна иногда даже для установленія общихъ истинъ, и изговяръ изъ преподаванія всякое примѣненіе дедукціи — неразумно.

Все вышесказанное имѣло цѣлью показать, что наша современная методика арифметики, не только русская, но и западно-европейская, ни коимъ образомъ не можетъ считаться вполне опредѣлившейся дисциплиной, и я думаю, что приведенные примѣры вполне убѣдительно показываютъ, какъ много спорнаго и противорѣчиваго въ наукѣ объ обученіи арифметикѣ. И не буду останавливаться на детальномъ разборѣ этихъ разногласій, не буду пытаться установить правильную точку зрѣнія на каждый изъ затронутыхъ вопросовъ; это не входитъ въ мою задачу. Мнѣ важно было установить самый фактъ существованія спорныхъ пунктовъ въ методикѣ арифметики и, по возможности, выяснить причины, вызывающія эти разногласія и противорѣчивые взгляды. Такихъ причинъ, можетъ быть, много, но, во всякомъ случаѣ, среди нихъ врядъ-ли играетъ какую-нибудь роль та причина, которую некогда указывалъ Берклъ, т. е. отсутствіе общей идеи, объединяющей все методическія положенія и требованія, отсутствіе одного принципа, изъ котораго вся методика арифметики вытекала-бы, какъ необходимое и единственное слѣдствіе. Наоборотъ, мнѣ думается, что многія разногласія и противорѣчивыя мнѣнія являются результатомъ извѣстной теоретичности въ построеніи методики арифметики и объясняются именно стремленіемъ вывести дедуктивно все методическія положенія изъ одного какого-нибудь принципа, установленного недостаточно научно и на опытѣ мало протѣреннаго. Песталоцци и его послѣдователи, на основаніи чисто теоретическихъ соображеній, выдвинули на первый планъ формальную цѣль обуче-

ны арифметики и, въ зависимости отъ этого, опредѣляли объемъ и характеръ курса и методъ преподаванія. Въ настоящее время формальная цѣль подчиняется матеріальной, и въ зависимости отъ этого руководящаго принципа перестраивается курсъ арифметики, можетъ быть, этотъ принципъ и вѣренъ, но онъ добытъ не путемъ опыта и наблюденія надъ учащимися, а установленъ опять-таки чисто теоретически. Въ свое время появился Грубе и возмѣстилъ монографическое изученіе чиселъ, и вся методика арифметики приняла извѣстное направленіе, и у насъ въ Россіи появились сочиненія Бутушевскаго, Наульсона, Воленса и другихъ, видѣвшихъ единственное спасеніе въ «изученіи чиселъ». Но вотъ появляются въ Германіи работы Кюпплинга и Талка, а у насъ Гольденберга и Шохоръ-Троцкаго, очень остроумно и рѣзко, но чисто-теоретически критикующія ученіе Грубе, и принципъ изученія чиселъ отброшены, какъ ненужная вещь, а на мѣстѣ его устанавливается принципъ изученія дѣйствій и вся методика арифметики перестраивается сообразно этому. Въ недавнее время д-ръ Май публикуетъ свое руководство къ первоначальному обученію арифметикѣ, въ основѣ котораго положенъ опять-таки принципъ непосредственнаго воспріятія числа путемъ наблюденія конкретныхъ группъ, и методика арифметики снова поворачиваетъ къ сторону заброшеннаго и забытаго изученія чиселъ. Въ томъ-то и бѣда, что наши методисты, требуя примѣненія индуктивнаго метода при обученіи дѣтей, при построеніи самой методики арифметики пользуются, по большей части, чистой дедукціей, исходя при этомъ изъ положенія, не провѣреннаго на опытѣ (методика Галанина).

Я предвижу возраженія. Мнѣ могутъ сказать, что именно за послѣднее время методика арифметики становится какъ будто на другой путь, путь экспериментальнаго изслѣдованія. Работы д-ра Мая, Шнейдера, Вальземана и др. стараются чисто опытнымъ путемъ установить факты, подтверждающіе ихъ теоріи. Въ этомъ возраженіи, несомнѣнно, имѣется доля истины. Но, во-первыхъ, нужно-же признать, что этихъ экспериментальныхъ работъ пока еще очень немного, а, во-вторыхъ, онѣ производятся въ особыхъ условіяхъ, далеко не всегда со-

отвѣтствующихъ условіямъ дѣйствительной работы учителя въ классѣ. Во всякомъ случаѣ, такіе научно поставленные опытные изслѣдованія весьма важны и полезны, и можно только пожелать имъ болѣе широкаго распространенія. Но ихъ однакъ, по моему мнѣнію, все-таки недостаточно для правильного развитія методики арифметики. Мы до сихъ поръ изучали методику арифметики почти догматически, принимая на вѣру то, что вычитывали въ томъ или другомъ руководствѣ. Пора намъ и въ этой области перейти не только къ наглядной, но и лабораторной работѣ; пора намъ самимъ, учителямъ, принять активное участіе въ выработкѣ методики. Пусть каждый учитель, отвергнувъ разъ навсегда всякую рутину, производить изслѣдованія въ своемъ классѣ, испытывая различные приемы обучения и наглядныя пособія, дѣлаетъ опыты надъ введеніемъ въ курсъ новыхъ отдѣловъ, старательно отмѣчаетъ интересъ дѣтей къ отдѣльнымъ частямъ курса къ тѣмъ или инымъ задачамъ и т. д. Разумѣется, въ такой работѣ отдѣльнаго учителя могутъ встрѣчаться ошибки и неправильные выводы, зависящіе отъ многихъ причинъ. Ихъ нужно поправить сравненіемъ съ результатами работъ другихъ учителей. Нужна коллективная обработка методики арифметики всѣми учителями начальной и средней школы. Поэтому нужно пожелать, чтобы создались надлежащіе условія для такой коллективной работы, чтобы съѣзды преподавателей математики, педагогическія выставки, кружки и общества учителей математики получили возможно широкое распространеніе и стали бы не исключительными, а обычными явленіями нашей педагогической жизни».

VIII. О лабораторныхъ занятіяхъ по математикѣ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Кавказскаго учебнаго округа.

Докладъ Н. И. Попова (Тифлисъ).

11 сентября 1907 года г. Почетнымъ Кавказскаго учебнаго округа былъ изданъ циркуляръ о практическихъ лабораторныхъ занятіяхъ по всѣмъ предметамъ средней школы.

«Однимъ изъ серьезныхъ недостатковъ нашей средней школы, говорится въ циркулярѣ, несомнѣнно является нѣкоторая отвлеченность преподаванія, оторванность усваиваемаго питомцами школы учебнаго матеріала отъ жизни, вслѣдствіе чего оканчивающіе курсъ школы, въ лучшемъ случаѣ, выносятъ изъ нея одни отвлеченныя, пріобрѣтенныя чисто теоретическимъ путемъ, познанія и очень мало основательныхъ практическихъ умѣній, необходимыхъ для жизни и служащихъ средствомъ для прочнаго закрѣпленія въ сознаніи молодыхъ людей преподаваемаго имъ въ школѣ теоретическаго матеріала». Однимъ изъ средствъ къ устраненію указаннаго недостатка рекомендуется введеніе практическихъ, «такъ сказать, лабораторныхъ занятій по всѣмъ предметамъ средней школы». Эти практическія занятія, служа цѣлямъ закрѣпленія преподаваемаго въ классѣ, заинтересуютъ и привлекутъ учащихся, если будетъ проведенъ принципъ самостоятельности при исполненіи всякой работы.

Принципиальный вопросъ объ организаціи практическихъ «лабораторныхъ» занятій по всѣмъ предметамъ курса среднихъ учебныхъ заведеній былъ подвергнутъ обстоятельному и всестороннему обсужденію на Педагогическихъ Совѣтахъ и, согласно заключеніямъ и постановленіямъ таковыхъ, эти занятія по тѣмъ или другимъ предметамъ, въ зависимости отъ мѣстныхъ условій, начали постепенно входить въ жизнь учебныхъ заведеній, какъ одинъ изъ могучихъ факторовъ въ общей системѣ обученія и воспитанія.

Въ настоящее время въ Кавказскомъ учебномъ округѣ къ лабораторнымъ занятіямъ относятся такія работы учащихся, которыя удовлетворяютъ слѣдующимъ существеннымъ признакамъ ихъ выполненія: 1) Лабораторныя занятія происходятъ во внѣурочное время. 2) Они необязательны, и учащіеся имѣютъ право выбрать для лабораторныхъ занятій ту или другую группу наукъ, тотъ или другой кругъ вопросовъ изъ данной науки. 3) Всю работу производятъ ученики самостоятельно: они самъ разсматриваютъ, разбираютъ и собираютъ приборъ, самъ ставятъ опыты, производятъ наблюденія, дѣлаютъ вычисления и самостоятельно выводятъ окончательное заключеніе.—

«Пусть Эмиль не заучиваетъ готовой науки, а самостоятельно продумываетъ ее» (Руссо). Учителемъ здѣсь является только опытнымъ руководителемъ въ выборѣ темъ для работы, умѣлымъ совѣтчикомъ въ затруднительныхъ случаяхъ, направляющимъ мысли неопытнаго молодого изслѣдователя на тѣ стороны предмета, которыя остались въ его вниманіи. 4) Лабораторныя занятія должны быть поставлены въ тѣсную органическую связь съ матеріаломъ, изучаемымъ въ классѣ въ области той или другой науки.

Понятно, для прочной организаціи лабораторныхъ занятій вопросъ объ изысканіи средствъ какъ на приобрѣтеніе необходимыхъ пособій, такъ и на вознагражденіе руководителей, имѣетъ существенное значеніе и долженъ быть выясненъ и разрѣшенъ одновременно съ утвержденіемъ плана предполагаемыхъ работъ.

Не смотря на то, что всѣ Педагогическіе Совѣты признали важное значеніе лабораторныхъ занятій въ общей системѣ образованія и воспитанія, однако не вездѣ эти занятія введены.

Причины такого явнаго расхожденія слова съ дѣломъ крайне разнообразны: отсутствіе необходимыхъ помѣщеній, приборовъ, приспособленій, подготовленныхъ опытныхъ руководителей, отсутствіе средствъ на вознагражденіе руководителей, или обычное у насъ откладываніе необязательныхъ занятій со дня на день.

По тѣмъ или инымъ причинамъ, организація лабораторныхъ занятій по чистой и прикладной математикѣ не вошла еще въ жизнь всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеній. Въ тѣхъ же среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Кавказскаго Учебнаго Округа, въ которыхъ вышеприведенная мысль Попечителя Округа о лабораторныхъ занятіяхъ получила осуществленіе, занятія эти находятся въ періодѣ постепеннаго развитія и не представляютъ пока стройной законченной системы, охватывающей всевозможные виды практическихъ занятій, требующихъ извѣстныхъ познаній изъ математики.

На основаніи свѣдѣній, доставленныхъ начальниками учебныхъ заведеній къ 18 декабря 1911 года, всѣ лаборатор-

ныя занятія по математикѣ, организованныя въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Кавказскаго Учебнаго Округа, можно раздѣлять на слѣдующіе виды: 1. Практическія занятія, относящіеся къ арифметикѣ, геометріи и тригонометріи. 2. Обработка метеорологическихъ наблюдений. 3. Практическія занятія по физикѣ измѣрительнаго характера, требующія вычислений или составленія графиковъ.

1. Въ некоторыхъ учебныхъ заведеніяхъ, лабораторныя занятія начинаютъ примѣняться съ младшихъ классовъ при прохожденіи арифметики: послѣ знакомства съ квадратными и кубическими мѣрами, ученики опредѣляютъ объемъ класса; число кубическихъ сажень дровъ, сложенныхъ на дворѣ; число кирпичей, необходимыхъ для устройства столба или стѣны; измѣряютъ площади оконъ, пола, двора или какого-либо другого земельного участка. Для составленія правильныхъ представлений о крупныхъ единицахъ длины и поверхности, ученики въ открытомъ полѣ опредѣляютъ глазомеромъ разстоянія между телеграфными столбами и другими предметами, а затѣмъ проверяютъ свои непосредственнымъ измѣреніемъ рулеткой. Подобнымъ образомъ дѣти знакомятся съ верстой, со средней скоростью иѣнехода, съ измѣреніемъ земельныхъ участковъ и съ нанесеніемъ ихъ на планъ въ томъ или inomъ масштабѣ.

Въ старшихъ классахъ, ученикамъ предлагаются уже болѣе сложныя практическія работы и притомъ на открытой мѣстности. При прохожденіи и повтореніи отдѣла геометріи о площадяхъ, они производятъ съемку плановъ земельныхъ участковъ при помощи аэроляби и мензулы. Кроме того, учениками непосредственно изготовляются модели геометрическихъ тѣлъ изъ дерева, стекла, слюды и проволоки, служащія наглядными пособиями при прохожденіи курса геометріи. Свои познанія по тригонометріи ученики примѣняютъ къ опредѣленію, съ помощью теодолита и мѣрной цѣпи или рулетки, разстояній какъ между двумя недоступными точками, такъ и высотъ различныхъ возвышенныхъ предметовъ, напр.: церквей, маяковъ, деревьевъ.

II. Метеорологическія наблюденія на станціяхъ, устройен

ныхъ при нѣкоторыхъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ и городскихъ училищахъ, представляютъ тотъ типъ лабораторныхъ занятій, который уже давно существовалъ въ Кавказскомъ Округѣ и въ настоящее время все болѣе развиваются. Особенно важное практическое и научное значеніе имѣетъ организація непрерывныхъ метеорологическихъ наблюдений. Получаемая при этомъ данная, при обработкѣ ихъ, представляютъ хороший матеріалъ для упражненія учениковъ въ вычисленіяхъ и нахожденіи среднихъ величинъ; при вычерчиваніи графиковъ по этимъ даннымъ ученики знакомятся съ различными видами функциональной зависимости. Для достиженія при занятіяхъ на метеорологическихъ станціяхъ преслѣдуемыхъ научныхъ и педагогическихъ цѣлей необходимо, чтобы производимыя наблюденія, во 1-хъ, были надежны и, во 2-хъ, были непрерывны.

Въ виду же того, что правильное, тщательное и регулярное веденіе наблюдений требуетъ особенныхъ наклонностей, которыми большинство учениковъ не обладаетъ, все дѣло приходится сосредоточивать, подъ общимъ наблюдениемъ преподавателя, въ рукахъ немногихъ любителей, на которыхъ и возлагается обязанность производить ежедневныя наблюденія въ 7 час. утра, въ 1 ч. дня и въ 9 час. вечера. Обработка этихъ наблюдений порѣдко поручается другимъ ученикамъ. Благодаря такому веденію дѣла, почти всѣ ученики имѣютъ возможность ознакомиться въ любое время съ правильными научными метеорологическими наблюденіями, изучать производствѣ ихъ, заниматься обработкой результатовъ этихъ наблюдений и получать точныя данныя для составленія графиковъ.

Кромѣ того, въ нѣкоторыхъ учебныхъ заведеніяхъ, при которыхъ имѣтъ метеорологическихъ станцій, ведутся — главнымъ образомъ съ цѣлью практическаго ознакомленія учениковъ съ составленіемъ графиковъ — простѣйшія метеорологическія наблюденія надъ температурой и давленіемъ атмосферы.

III. Наиболѣе широкую и систематическую постановку получили въ Кавказскомъ Учебномъ Округѣ лабораторныя занятія по физикѣ. Занятія эти подраздѣляются на четыре отдѣла: 1) измѣрительнаго характера, 2) качественнаго харак-

тера, 3) работы по изготовленію приборовъ по физикѣ, 4) чтеніе рефератовъ.

Спеціальныя задачи настоящаго Съезда побуждаютъ остановиться лишь на первой категоріи занятій учениковъ, т. е. на работахъ измѣрительнаго характера. Работы эти ведутся преподавателями съ группами учениковъ по 2—3 чело-вѣка въ каждой—опытъ показали преимущество этой системы передъ фронтонной. Каждой группѣ предлагается отдельная работа изъ пройденнаго курса физики, выдаются необходимые для выполненія заданія приборы и матеріалъ, и ученики, подъ руководствомъ преподавателя, пользуясь возможно болѣею самостоятельностью, производятъ опыты и наблюденія, дѣлаютъ отсчеты и измѣренія; полученные результаты тутъ же обрабатываются и записываются въ книгу. Болѣе сложныя вычисленія и составленіе графиковъ иногда производятся дома.

Въ настоящее время лабораторныя занятія по физикѣ практикуются почти во всѣхъ учебныхъ заведеніяхъ Округа. Многими преподавателями, имѣющими за собой большую практику, выработаны даже системы послѣдовательныхъ работъ, способы ихъ выполненія, приемы записи данныхъ опыта и послѣдующихъ вычисленій и составленіе отчета о произведенной работѣ.

IV. Полученными отъ преподавателей свѣдѣніями устанавливается тотъ отрадный фактъ, что занятія эти повсемѣстно встрѣчаютъ живой откликъ и вызываютъ большой интересъ среди учащихся. Уже одно то обстоятельство, что занятія эти, не смотря на свою необязательность, привлекаютъ значительное число учениковъ, — служитъ яркимъ свидѣтельствомъ жизнеспособности описанной выше мѣры— введенія лабораторныхъ занятій. Дальнѣйшее ея преусиленіе, очевидно, находится въ рукахъ преподавателей, и отъ нихъ зависитъ успѣхъ этого большого дѣла.

Остается еще добавить, что Попечитель Кавказскаго Учебнаго Округа, особенно сочувственно относясь къ вопросу о лабораторныхъ занятіяхъ, организовать—спеціально въ видахъ содѣйствія расширенію области указанныхъ занятій по физикѣ и математикѣ,—періодическое изданіе Физико-Матема-

тическаго Сборника, къ участию въ коемъ привлекаются ученики. Участіе это должно выразиться въ присылкѣ учениками рѣшеній задачъ, предложенныхъ въ сборникѣ, рефератовъ, имѣющихъ въ основѣ оригинальную мысль, переводовъ статей, оригинальныхъ задачъ изъ курса среднихъ учебныхъ заведеній и вообще всего, что является дѣйствительнымъ результатомъ лабораторныхъ занятій учащихся по чистой и прикладной математикѣ и представляетъ общій интересъ.

Съ результатами лабораторныхъ занятій учениковъ Кавказскаго Учебнаго Округа желающіе могутъ нагляднѣе ознакомиться по работамъ учениковъ, помещеннымъ на открытой при Сѣздѣ выставкѣ; тамъ же имѣются для ознакомленія экземпляры упомянутаго выше Физико-Математическаго Сборника».

Пренія по докладу Н. П. Попова.

В. И. Барвинскій (Маріуполь, Екат. губ.) высказался въ томъ смыслѣ, что вопросы, затронутые въ докладѣ г. Попова, были бы болѣе уместны въ специальной секціи окончившагося II Менделѣвскаго сѣзда. Что же касается метеорологическихъ наблюденій, то на нихъ, по мнѣнію оппонента, нельзя смотрѣть, какъ на практическія занятія по математикѣ.

Б. К. Крамаренко (Тифлисъ) замѣтилъ, что вычислительныя работы по физикѣ, метеорологин и космографин, сопровождаемыя вычерчиваніемъ графиковъ, представляютъ собою въ той же мѣрѣ практическую работу по математикѣ, какъ приготовленіе учащимися геометрическихъ моделей представляетъ собою практическую работу по геометрин.

М. Е. Волокобинскій (Рига) указалъ, что у него имѣются свѣдѣнія о томъ, что указанная докладчикомъ постановка лабораторнаго метода въ Кавказскомъ округѣ только начинаеть развиваться и еще не является столь солидно поставленнымъ дѣломъ, какъ это можно было бы заключить изъ доклада г. Попова. По мнѣнію оппонента, этотъ докладъ слѣдовало бы подкрѣпить цифровыми данными.

И. П. Поповъ. „Вполнѣ соглашаясь съ мнѣніемъ г. Волокобинскаго, отгвѣтившаго необходимость подкрѣпленія доклада соотвѣтствующими цифровыми данными, считаю себя обязаннымъ

пояснить, что польза приведенія этихъ данныхъ сознавалась мною при составленіи доклада. Однако, осуществленію этого предположенія помѣшала краткость того времени, которое имѣлось въ моемъ распоряженіи для надлежащей разработки относящагося сюда статистическаго матеріала. Притомъ же, сообщеніе въ многочисленномъ собраніи многочисленныхъ цифровыхъ данныхъ едва ли могло бы имѣть реальное значеніе для собранія. Тѣмъ не менѣе, отнѣсшійся выше пробѣлъ будетъ восполненъ въ упомянутомъ мною Физико-Математическомъ Сборникѣ".

В. К. Крамаренко (Тифлисъ). „Въ томъ, что подобныя занятія дѣйствительно имѣютъ мѣсто въ уч. заведеніяхъ Кавказскаго Учебнаго Округа, желающіе могутъ убѣдиться, посмотрѣвъ работы учащихся на выставкѣ, на которую присланы работы изъ Тифлисскихъ 1-ой, 2-ой, 3-ей и 4-ой гимназій, Владикавказской 1-ой, Сочинской прогимназіи, Елисаветпольской гимназіи, Ейскаго, Кубанскаго, Бакинскаго, Тифлискаго, Темрюкскаго реальныхъ училищъ. Везти сюда всѣ работы, конечно, было бы излишне“.

IX. Отдѣлъ логарифмовъ въ средней школѣ.

(Желательныя измѣненія въ преподаваніи теоріи и практики логарифмовъ).

Докладъ В. А. Марковича (Сиб.).

„Учебный планъ теоріи и практики логарифмовъ въ современной русской школѣ страдаетъ въ двухъ отношеніяхъ: онъ недостаточно строгъ съ научной точки зрѣнія и, вмѣстѣ съ тѣмъ, представляетъ значительныя трудности для начинающихъ.“

Научное изложеніе теоріи логарифмовъ требуетъ предварительнаго установленія понятія объ ирраціональных числахъ и некоторыхъ свойствъ показательной функціи. Но послѣднее выходитъ изъ предѣловъ программы, а первое, т. е. теорія ирраціональных чиселъ, хотя и значится въ ней, по приходится болѣе, чѣмъ примитивно.

Между тѣмъ, русскіе учебники алгебры начинаютъ отдѣлъ съ общихъ теоремъ. Въ курсѣ элементарной алгебры такія теоремы совершенно невразумительны для учениковъ, потому

что ходъ доказательствъ для нихъ непривыченъ и очень труденъ. Въ результатѣ,—если только преподаватель слѣдуетъ такому учебному плану, что, къ счастью, не составляетъ общаго правила, — ученики съ большими лишь усиліями преодолеваютъ обоснованіе теоріи логарифмовъ, научно не состоятельное, методически не производительное и практически—совершенно безполезное.

Изученіе логарифмической практики также поставлено мало производительно и неправильно. Главный недостатокъ здѣсь тотъ, что логарифмическія вычисленія не связаны съ сплестомъ приближенныхъ вычисленій вообще. Наши задачки предлагаютъ вычисленія необыкновенно вычурныхъ формулъ, степеней и корней съ совершенно фантастическими показателями, но числа въ нихъ подобраны для пятизначныхъ лишь логарифмовъ, и отвѣты требуются такіе, чтобы не могло даже возникнуть вопроса о степени точности окончательныхъ результатовъ.

Эти немногія общія указанія считаю достаточными для утвержденія, что учебный планъ отдѣла логарифмовъ требуетъ той же коренной методической реформы, какъ и почти всѣ другіе отдѣлы курса математики средней школы. Необходимо подраздѣлить изученіе логарифмовъ на двѣ ступени. На первой нужно дать правила логарифмированія и достаточную практику вычисленій съ четырехзначными или пятизначными таблицами; во вторую,—при существующемъ объемѣ курса,—могла бы войти остальная часть требуемаго нынѣ матеріала съ самыми незначительными дополненіями.

Въ русской литературѣ, насколько мнѣ извѣстно, не поднимался еще вопросъ о необходимости подраздѣленія изученія логарифмовъ на ступени. Поэтому, въ подтвержденіе своихъ тезисовъ, я вынужденъ обратиться къ иностранной практикѣ и литературѣ.

Во французской средней школѣ давнымъ-давно, еще до реформы 1902—1905 г.г., установлено было такое подраздѣленіе: въ общихъ классахъ давалось опредѣленіе логарифмовъ, какъ послѣдовательныхъ членовъ арифметической прогрессіи, соответствующихъ послѣдовательнымъ членамъ нѣкоторой гео-

метрической. Изъ этого опредѣленія непосредственно выводились правила логарифмированія и свойства десятичныхъ логарифмовъ. И только въ дополнителѣномъ курсѣ (*classes mathématiques spéciales*) устанавливалось опредѣленіе логарифма, какъ показателя степени. До вторичнаго изученія логарифмовъ проходились: свѣрха теорія ирраціональныхъ чиселъ, дробные и несоизмѣримые показатели; бивомъ Ньютона со многими его приложениями и, въ частности, съ выводомъ числа e , теорія рядовъ и, наконецъ, спеціальная глава о показательной функціи. Понятно, что послѣ такой подготовки ученики получали и усваивали не квази-доказательства, а настоящія доказательства, не обрывки теорій, а стройную теорію логарифмической функціи.

Въ 1902 году программы и, въ особенности, методы преподаванія французской средней школы подверглись коренной ломкѣ. Въ 1905 году программа пошла еще дальше въ сторону реформы обученія. Но, несмотря на многія существенныя измѣненія въ другихъ областяхъ алгебры, реформа сохранила, въ общемъ, прежній учебный планъ для логарифмовъ, формально установивъ раздѣленіе этого отдѣла на два цикла.

Въ Англіи издавна установлено подраздѣленіе отдѣла логарифмовъ. Теорія логарифмовъ проходила въ курсѣ алгебры, практика—въ курсѣ тригонометріи. Это уже имѣетъ нѣкоторое облегченіе. Кроме того, ученики избавлены отъ непродуманныхъ упражненій въ логарифмированіи пѣдно-сложныхъ формулъ; вычисленія даются болѣе или менѣе практическаго характера для сложныхъ процентовъ, срочныхъ уплатъ, уравненій сроковъ, для вопросовъ элементарной теоріи вѣроятностей и страховыхъ. Но главная особенность англійскаго плана—краткость теоретическихъ свѣдѣній о логарифмахъ. Несмотря на то, что изложенію теоріи логарифмовъ предшествуютъ, кромѣ прогрессій, такіе отдѣлы, какъ бивомъ Ньютона съ его приложениями, неопредѣленные коэффиціенты, «экспоненціальная теорема» (разложеніе a^x и e^x въ ряды по степенямъ x) и, наконецъ, теорія рядовъ, — отдѣлъ (алгебраическій) о логарифмахъ занимаетъ нѣсколько лишь страницъ, — гораздо меньше, чѣмъ въ русскихъ учебникахъ, и притомъ нѣтъ ни одной изъ

«общихъ теоремъ», о которыхъ была рѣчь. Интересно отмѣтить, что такихъ теоремъ нѣтъ и въ «Учебникѣ Алгебры» г. В. Чиханова, допущенномъ Мин. Нар. Просв. въ качествѣ руководства для гимназій. Между прочимъ, въ этомъ руководствѣ даже распространеніе свойствъ рациональных показателей на иррациональные производится однимъ лишь «словеснымъ условіемъ».

Цѣль моего сообщенія—обратить вниманіе Съѣзда на нѣкоторые новые приемы, значительно облегчающіе первоначальное знакомство съ теорією и практикою логарифмовъ, и на такую программу, которая дала бы законченное содержаніе для перваго цикла п, вмѣстѣ съ тѣмъ, практическую подготовку для послѣдующаго изученія теорій показательныхъ и логарифмическихъ функцій.

Изложу въ сокращенномъ видѣ планъ перваго концентрата того курса логарифмовъ, который мнѣ пришлось провести два года тому назадъ въ духѣ французской программы.

Изъ основнаго допущенія

$$\log a + \log b = \log (ab) \quad (I)$$

немедленно выводится:

$$1) \log 1 = 0,$$

положивъ въ (I) число $b = 1$;

$$2) \log \frac{1}{a} = -\log a,$$

положивъ въ (I) $b = \frac{1}{a}$;

$$3) \log (a : b) = \log a - \log b,$$

взявъ, вмѣсто b , дробь $\frac{1}{b}$;

$$4) \log (a^n) = n \log a,$$

принявъ въ соображеніе, что

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a.$$

Столь же легко получить, что

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a,$$

и распространить значеніе $\log (a^n)$ на случай отрицательныхъ и дробныхъ показателей.

Всѣ эти правила я подтверждаю числовыми примѣрами, взятыми изъ таблицы трехзначныхъ логарифмовъ. Логарифмы приведены въ ней съ характеристиками (0 и 1), что позволяетъ оперировать съ логарифмами, и ученики въ одинъ—два урока твердо усваиваютъ обращеніе съ нею.

Послѣ этого я показываю, что если помножить логарифмической же таблицы на какое угодно конечное число, то получится новая таблица логарифмовъ, т. е. устанавливаю понятіе о множественности логарифмическихъ системъ, а затѣмъ—понятіе объ основаніи системы (т. е. о числѣ, логарифмъ котораго принять за единицу) и, наконецъ, устанавливаю, что логарифмы известной уже ученикамъ таблицы называются десятичными, такъ какъ въ ней $\log 10 = 1$.

Затѣмъ столь же просто выводятся свойства десятичныхъ логарифмовъ въ не менѣе полномъ объемѣ, чѣмъ въ систематическихъ курсахъ, но съ болѣе точнымъ опредѣленіемъ характеристики, которая вообще не можетъ быть отождествлена съ «цѣлою частью логарифма», напр., для отрицательныхъ логарифмовъ; наконецъ, можно перейти къ таблицамъ четырехзначныхъ или пятизначныхъ логарифмовъ.

Въ первый годъ своего преподаванія по этой системѣ (въ шестомъ классѣ женской гимназіи) я переходилъ къ четырехзначнымъ логарифмамъ, въ слѣдующемъ году я былъ стѣсненъ учебнымъ временемъ и потому непосредственно перешелъ къ пятизначнымъ таблицамъ. Могу засвидѣтельствовать, что результаты получалъ не худшіе, чѣмъ при предварительномъ знакомствѣ съ четырехзначными. Дѣло въ томъ, что главную подготовку къ «настоящимъ таблицамъ» даетъ первая «учебная» таблица трехзначныхъ логарифмовъ. Переходъ къ таблицамъ пятизначнымъ составлялъ лишь небольшое арифметическое осложненіе.

При такомъ учебномъ планѣ отдѣлъ логарифмовъ является для учащихся однимъ изъ самыхъ легкихъ, интересныхъ и имѣющихъ много примѣненій.

Переходъ къ второму циклу чрезвычайно легокъ; исходя изъ тѣхъ же допущеній, можно непосредственно доказать, что всякій логарифмъ является показателемъ въ некоторой степени

основанія системы, т. е. того числа n , для котораго $\log n = 1$.

Этотъ учебный планъ, котораго я придерживаюсь *) уже третій годъ, нѣсколько отличается отъ французскаго 1-го цикла, но основы ихъ одинаковы. Вѣроятно, во Франціи новый учебный планъ получитъ еще болѣе подробную и удачную разработку, но и тѣхъ фактовъ и соображеній, которые я здѣсь привелъ, совершенно, по моему мнѣнію, достаточно, чтобы поставить на очередь вопросъ о реформѣ преподаванія отдѣла о логарифмахъ въ русской средней школѣ.

Т е з и с ы.

I) Обоснованіе теоріи логарифмовъ въ курсахъ русской средней школы оставляетъ многого желать въ отношеніи научной строгости.

II) Вместе съ тѣмъ, несмотря на послабленія въ области доказательствъ, изученіе логарифмовъ представляетъ значительныя трудности для учениковъ, — особенно въ началѣ, вслѣдствіе чего и преподавателямъ приходится затрачивать несоразмѣрное (съ существомъ дѣла) количество труда и класснаго времени. Оба эти факта легко объясняются недостаточною разработанностью методики преподаванія теоріи и практики логарифмовъ.

П р е д л о ж е н і я.

1) Слѣдуетъ раздѣлять преподаваніе «Отдѣла логарифмовъ» на два цикла.

2) Въ первомъ циклѣ необходимо постулировать нѣкоторыя свойства логарифмовъ, что дастъ возможность легко и, вмѣстѣ съ тѣмъ, совершенно строго вывести остальные ихъ общія свойства и, въ частности, отличительныя свойства десятичныхъ (обыкновенныхъ) логарифмовъ.

*) Интересующимся подробностями этого плана я могу указать лишь на мою книгу «Начальные логарифмы», Сиб. 1912, книга преподавателя. Цѣна 60 коп.

3) Основной постулатъ для перваго цикла п, вмѣстѣ съ тѣмъ, первоначальное опредѣленіе логарифма:

Возьмемъ двумя положительнымъ числамъ (a и b) и ихъ произведенію (ab) соответствуютъ другія числа ($\log a$, $\log b$ и $\log ab$), удовлетворяющія равенству:

$$\log a + \log b = \log (ab)$$

Это видоизмѣненіе извѣстнаго въ Анализѣ опредѣленія логарифмической функціи, для которой, при двухъ значеніяхъ x_1 и x_2 независимой переменной существуетъ тождество:

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 x_2)$$

Изъ этого опредѣленія непосредственно и чрезвычайно просто выводятся другія общія свойства (не зависящія отъ величины, знака и характера ихъ основаній), а именно, тождественныя преобразованія выраженій: ($\log abcde\dots$), $\log 1$, $\log \frac{a}{b}$, $\log x^n$ (при n — цѣломъ и дробномъ, положительномъ и отрицательномъ).

4) Вслѣдъ за опредѣленіемъ логарифмовъ слѣдуетъ дать ученику «начальную таблицу» логарифмовъ (обыкновенныхъ трехзначныхъ) для иллюстраціи всѣхъ доказываемыхъ свойствъ на числовыхъ примѣрахъ; тѣмъ самымъ ученики постепенно освоятся съ практикою логарифмическихъ вычисленій.

5) Передъ изложеніемъ отличительныхъ свойствъ десятичныхъ логарифмовъ необходимо дать ясное и твердое понятіе о множественности логарифмическихъ системъ, и это очень легко сдѣлать помимо представленія о логарифмѣ, какъ о показателѣ степени того или другаго основанія. Соответственные числовые примѣры: 1) рельефно показываютъ значеніе «основанія» логарифмической системы п, въ частности, основанія, равнаго 10; и 2) служатъ превосходною подготовкою къ общей формулѣ перехода отъ одной логарифмической системы къ другой (самый же выводъ общей формулы слѣдуетъ отнести ко 2-му циклу).

6) Изложеніе свойствъ десятичныхъ логарифмовъ можетъ почти совпасть съ обычнымъ; однако, при предлагаемомъ методическомъ планѣ у учениковъ будетъ серьезное преимущество: всѣ новыя правила можно наглядно иллюстрировать

на числовыхъ примѣрахъ съ помощью усвоенныхъ уже трехзначныхъ логарифмовъ.

Кромѣ того, полезно въ этой главѣ исправить неточное или, во всякомъ случаѣ, недостаточное опредѣленіе характеристик логарифма, обычно допускаемое въ общепринятыхъ руководствахъ элементарной алгебры.

7) Можно затѣмъ непосредственно перейти къ пятизначнымъ таблицамъ. Опытъ показываетъ, что ученики, освоившіеся съ основными понятіями при помощи трехзначныхъ логарифмовъ, легко и быстро усваиваютъ практику пятизначныхъ логарифмовъ.

Впрочемъ, безполезно перейти сначала къ четырехзначнымъ логарифмамъ. Во 1), они достаточны для многихъ вычисленій реального характера, и вычисленія, съ помощью готовыхъ «поправокъ», совершаются значительно быстрее, чѣмъ съ пятизначными: поэтому при рѣшеніи опредѣленнаго числа задачъ получится серьезная экономія труда и времени, какъ для учениковъ, такъ и для преподавателя; во 2), на таблицѣ 4-хъ значныхъ логарифмовъ, вмѣстѣ съ ихъ «поправками» умѣщающейся на двухъ страницахъ, очень удобно показать устройство таблицъ «съ двойнымъ входомъ». Это будетъ добачною подготовкою къ быстрому усвоенію пятизначныхъ таблицъ, если затѣмъ перейти къ обычнымъ таблицамъ Шревалльскаго.

Примѣчаніе. При пользованіи таблицами и вообще при логарифмическихъ вычисленіяхъ возникаетъ не мало методическихъ вопросовъ, которые также ждутъ своей разработки.

8) Завершеніемъ перваго цикла, — или дополненіемъ къ нему, — можетъ явиться опредѣленіе логарифма, какъ показателя степени въ некоторомъ основаніи. Тогда ученики, проработавшіе указанный учебный планъ, оказываются отлично подготовленными къ новой для нихъ точкѣ зрѣнія и, какъ показываетъ опытъ, легко и уже сознательно усваиваютъ, — въ какихъ-нибудь 2 или 3 урока, — обычное изложеніе теоріи логарифмовъ.

9) Содержаніе и характеръ втораго цикла будутъ зависетьъ, прежде всего, отъ общаго учебнаго плана математики

въ средней школѣ. Если считаться съ существующими нормами учебнаго времени, то характеръ второго цикла будетъ преимущественно повторительный, и онъ начнется съ дополненія, указанного въ пунктѣ 8, кромѣ того, въ него войдутъ тѣ отрывочныя свѣдѣнія о различныхъ системахъ логарифмовъ и общая формула перехода отъ одной системы къ другой, опредѣленіе степени погрѣшности въ логарифмическихъ вычисленіяхъ и вообще тѣ дополненія, которыя помѣщаются «мелкимъ шрифтомъ» въ общепринятыхъ руководствахъ. Разница будетъ лишь та, что ученики окажутся гораздо лучше подготовленными.

10) Желательно, однако, одно важное дополненіе: болѣе подробное и, главное, болѣе наглядное изученіе показательной функціи и логарифмической, составленіе соответственныхъ графиковъ и пр.

Это дополненіе не только необходимо—оно вполне возможно и въ рамкахъ отводимаго нынѣ учебнаго времени. Дѣйствительно, указываемый учебный планъ даетъ, въ общемъ результатѣ, значительную экономію въ учебномъ времени, нынѣ затрачиваемомъ въ средней школѣ на изученіе логарифмовъ.

Пренія по докладу Б. А. Марковича.

М. Р. Блюменфельдъ (Спб.) „Предлагаемое опредѣленіе логарифма затмѣняетъ понятіе о сущности логарифма, какъ о корнѣ уравненія $a^x = N$. Дѣйствительно: 1) алгебра не знаетъ понятія $\log N$ безъ указанія основанія, при которомъ снѣ взять; 2) числа, удовлетворяющихъ равенству $\log a + \log b = \log ab$ —бесчисленное множество, 3) абсолютно не выясняется, что логарифмъ числа N (если N не есть рациональная степень основанія) есть число иррациональное; 4) $\log a$ опредѣляется въ зависимости отъ произвольнаго числа b , что является непонятнымъ; 5) непонятно, почему это опредѣленіе относится лишь къ положительнымъ значеніямъ a и b ; 6) непонятно, какъ слѣдуетъ понять задачу о переходѣ отъ одной системы логарифмовъ къ другой. Далѣе, никакихъ облегченій предлагаемый пріемъ не вноситъ. Вѣроятнымъ слѣдствіемъ такого опредѣленія логарифма въ связи съ употребленіемъ логарифмическихъ таблицъ явится то, что у учениковъ установится весьма нежелательный

взглядъ на цѣль введенія логарифмовъ, а именно лишь какъ на средство упрощенія вычисленій. Наконецъ, гдѣ неоднократно подчеркнутое съѣздами и столь необходимое выясненіе функциональной зависимости?

Проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской (Варшава) отмѣчаетъ опасность, которая можетъ возникнуть при необходимомъ, въ будущемъ, переходѣ отъ предлагаемаго докладчикомъ опредѣленія логарифма къ опредѣленію логарифма, какъ показателя степени, такъ какъ ученика приходится при этомъ переходѣ пересвоспитывать. Затѣмъ оппонентъ указываетъ на то, что функциональное управленіе—

$$\varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

которымъ опредѣляется докладчикомъ логарифмъ, является болѣе чуждымъ ученикамъ, чѣмъ трансцендентное уравненіе $a^x = N$, съ помощью котораго обычно опредѣляется логарифмъ.

С. Б. Шарбе (Екатеринославъ) указываетъ, что возможны два способа изложенія главы о логарифмахъ. Первый способъ, который изложенъ докладчикомъ, состоитъ въ томъ, что на первый планъ выдвигается сущность логарифмовъ, какъ орудія вычисления. Второю выдвигаетъ въ первую очередь логарифмическую функциональную зависимость. Та форма изложенія, которую далъ докладчикъ, можетъ показаться учащимся фокусомъ, сущности котораго преподаватель вначалѣ не излагаетъ. Въ обычномъ же способѣ изложенія изъ равенства $c = a^b$, вслѣдствіе отсутствія закона перемѣстительности, необходимо слѣдуетъ, вполне понятная для учащихся, возможность двухъ обратныхъ операций: $a = \sqrt[b]{c}$ и $1 = \log_a c$. Вначалѣ можно даже не сообщать опредѣленія логарифма. Учащіеся должны прежде всего усвоить себѣ и привыкнуть къ гроящему обозначенію одного и того же соотношенія между тремя числами. Что касается до механизма вычисленій помощью логарифмовъ, то достаточно таблицу логарифмовъ временно замѣнить такой: $1 = 10^{0,000}$, $2 = 10^{0,301}$, $3 = 10^{0,477}$, $4 = 10^{0,602}$, $5 = 10^{0,699}$, $6 = 10^{0,778}$ и т.д. и показать на этой таблицѣ, что умноженіе сводится къ сложению показателей. Затѣмъ можно показать, что дѣйствительно, напр.,

$$\log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3.$$

Послѣ такихъ разъясненій врядъ ли найдутся учащіеся, для которыхъ глава о логарифмахъ будетъ трудной или останется не понятной.

П. О. Рабиновичъ (Перновъ) считаетъ, что и при обычной постановкѣ статьи о логарифмахъ и логарифмическихъ вычисленіяхъ учащіеся быстро и хорошо усваиваютъ эту статью. Все

зависитъ отъ учителя. По мнѣнію оппонента, предложеніе докладчика начинать съ равенства

$$\log ab = \log a + \log b$$

нельзя считать цѣлесообразнымъ.

И. Г. Саровъ (Юрьевъ). «Предложеніе докладчика не ново, оно вполне опредѣленно высказано уже А. Влаккомъ въ 1633 году. По моему, слѣдовало бы разсматривать логариѳмы въ обыкновенныхъ пятизначныхъ таблицахъ, какъ цѣлые показатели:

$$\sqrt[100.000]{10} = 1,000023.$$

Тогда всѣ теоремы относительно дѣйствій надъ логариѳмами отпали бы, вслѣдствіе знакомства съ дѣйствіями надъ цѣлыми степенями. Далѣе слѣдовало бы знакомить учащихся съ удивительнымъ методомъ Нэпира для вычисления логариѳмовъ. Этимъ методомъ дается возможность вычислить четырехзначныя таблицы въ какихъ-нибудь три-четыре часа. Въ доказательство этого укажу на то, что для пробы здѣсь же, въ залѣ засѣданій, я вычислилъ 230 логариѳмовъ чиселъ, расположенныхъ между 1 и 10».

И. С. Луниковъ (Одесса) «Есть хорошая русская поговорка: «отъ добра добра не ищутъ». Методъ, предлагаемый докладчикомъ, не лучше стараго. 1) при переходѣ къ новымъ понятіямъ мы должны считаться съ тѣмъ, что они поражаютъ ученика именно своей новизной и неожиданностью. Равенство же $\lg ab = \lg a + \lg b$ является гораздо болѣе неожиданнымъ и непонятнымъ, чѣмъ обычное опредѣленіе логариѳма; 2) предлагаемый методъ грѣшитъ противъ двухъ основныхъ принциповъ, которые такъ недавно провозглашались съ этой кафедры: принципа наглядности и концентрическаго расположенія матерьяла. Равенство $\lg ab = \lg a + \lg b$ абсолютно никакой наглядностью не обладаетъ; 3) нельзя трактовать о вещахъ, не доказавъ ранѣе ихъ существованія. Поэтому нельзя писать соотношенія $\lg ab = \lg a + \lg b$, если не доказано, что существуютъ числа, ему удовлетворяющія».

С. Г. Колотъ (Перновъ, Лифл. губ.). «Не рѣдки случаи, когда молодые люди въ высшихъ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ безъ труда пріучаются пользоваться логариѳмической линейкой. Но при этомъ они часто затрудняются отвѣтить на вопросъ о томъ, на чемъ основаны устройство и пользованіе упомянутой линейкой. Это происходитъ отъ того, что въ средней школѣ не обращается достаточнаго вниманія на связь, существующую между прогрессіями и логариѳмами. Если имѣть въ виду эту связь, то, съ методической точки зрѣнія, переходъ отъ отдѣла прогрессій къ логариѳмамъ является простымъ, нагляднымъ и естественнымъ».

Б. А. Марковичъ (Спб.). «Я чрезвычайно благодаренъ послѣд-
нему оппоненту, который существенно облегчилъ мнѣ задачу воз-
разить остальнымъ. Въ самомъ дѣлѣ онъ предложилъ одинъ изъ
возможныхъ (и дѣйствительно существующихъ) вариантовъ началь-
наго изложенія отдѣла логарифмовъ. А передъ этимъ два другихъ
оппонента рассказали, какъ они «подходятъ» къ изложенію этого
отдѣла, что они считаютъ полезнымъ добавить или измѣнить.
Такимъ образомъ, не я, а оппоненты, несмотря на то, что, «отъ
добра добра не ищутъ», сами доказали, что возможно и полезно
отступать отъ обычнаго изложенія. Что касается громаднаго боль-
шинства остальныхъ возраженій, то они представляютъ собою
дѣловую сѣть явныхъ недоразумѣній. Я излагалъ то, что считаю
содержащимъ начальный цикл. А мнѣ возражаютъ, что эта поста-
новка вопроса ненаучна. Новъ томъ-то и дѣло, что *теорія* логарифмовъ,
при существующихъ условіяхъ, *не можетъ* быть дана въ научномъ обра-
боткѣ. Поэтому-то я и предлагаю давать основныя предложенія
безъ доказательствъ. Этимъ оппонентамъ я отвѣчу, что мой «на-
чальный циклъ» болѣе строгъ въ научномъ отношеніи, потому
что онъ не скрываетъ своихъ постулатовъ, а существующее изло-
женіе скрываетъ нѣсколько постулатовъ и въ доказательствѣ
основныхъ свойствъ логарифмовъ примѣняетъ положенія, доказы-
ваемые для рациональных показателей, распространяя ихъ безъ
всякой оговорки на совершенно невѣдомый учащемуся показатель.

Другіе оппоненты находятъ мое изложеніе «слишкомъ на-
учнымъ», слишкомъ труднымъ для учениковъ. Вѣрно, и это какъ
разъ я считаю достоинствомъ предлагаемаго перваго цикла. Онъ
соединяетъ простоту понятій со строгимъ проведеніемъ ихъ вза-
имной зависимости. Но тѣмъ и другимъ я скажу еще, что они
возражаютъ лишь противъ одной половины моихъ предложеній.
Они обратили вниманіе на элементы теоріи. Но въ этомъ циклѣ
важнѣе всего облегченіе практики логарифмическихъ вычисленій
съ помощью таблицы трехзначныхъ логарифмовъ вмѣсто пяти-
значныхъ, переходъ къ которымъ, при этой постановкѣ, весьма
легокъ. Указываютъ также, что мой первый цикл представляетъ
методическія трудности, едва-ли не большія, чѣмъ обычный спо-
собъ. Это только ихъ мнѣніе, притомъ не доказанное. Но у боль-
шинства моихъ оппонентовъ звучитъ одна общая нота, на кото-
рую позволяете мнѣ отвѣтить совершенно серьезно слѣдующимъ
примѣромъ. Я знаю одного чрезвычайно опытнаго, превосходнаго
(въ своей сферѣ) преподавателя, который на всѣ предложенія о
«новшествахъ» непремѣнно отвѣчалъ: «къ чему? Нѣтъ такого от-
дѣла въ курсѣ, котораго ученикъ не могъ бы понять. Если онъ
сразу не понялъ, объясни ему еще разъ, если мало — два, три

раза, хоть четыре, пять, и въ шестой разъ онъ будетъ знать. А если онъ и въ шестой разъ не пойметъ, то незачѣмъ ему и учиться математикѣ». Это—точка зрѣнія очень опредѣленная, очень ясная, и этотъ преподаватель, конечно, на нашъ Съѣздъ не записался.

Съ моей стороны было бы большимъ самоуниженіемъ думать, что предложенная мною точка зрѣнія не содержитъ никакихъ ошибокъ. Скажу только, что я представилъ не скороспѣлую фантазію, а составилъ курсъ, проработалъ его, провожу его уже третій годъ и смѣю увѣрить, что онъ далъ хорошіе результаты. Даже въ 6-омъ классѣ женской гимназіи ученицы безъ всякаго ущерба для остальныхъ частей курса свободно вычисляютъ съ пятизначными логарифмами, а въ 7-омъ классѣ, когда я долженъ излагать обычную теорію логарифмовъ, онѣ усваиваютъ ее въ два урока;—если не считать необходимыхъ дополненій. Я далеко отъ мысли просить резолюціи Съѣзда о немедленномъ введеніи защищаемой мною точки зрѣнія въ учебный планъ средней школы. Но я въ правѣ просить, чтобы вы содѣйствовали, по возможности активно, производству опытовъ, уже вошедшихъ въ обиходъ нѣкоторыхъ школъ Зап. Европы».

С. П. Шолоръ-Троцкий (Спб.). «Ученіе о логарифмахъ, сводящееся къ тому, что логарифмъ есть функція, удовлетворяющая извѣстнымъ функціональнымъ уравненіямъ, давно уже стало достояніемъ науки. Стремленія В. А. Марковича сводятся только къ тому, чтобы сдѣлать этотъ взглядъ плодотворнымъ въ дидактическомъ и методическомъ отношеніяхъ въ школахъ. Должно отмѣтить, что трудность этого взгляда для учащихся еще ничего не доказываетъ. Во-первыхъ, опыты въ этомъ направленіи сдѣланы весьма немногими изъ насъ, во-вторыхъ, методика вовсе не требуетъ того, чтобы учащимся все давалось безъ труда. Безъ труда со стороны учащихся обученіе математикѣ было бы не только бесполезнымъ, но даже прямо вреднымъ. Трудъ долженъ быть только полезнымъ для учащихся. Наконецъ, въ третьихъ, освобожденіе обученія отъ излишнихъ трудностей есть уже дѣло практической и теоретической методики, и докладъ В. А. Марковича представляетъ собою призывъ къ работѣ въ намѣченномъ имъ направленіи».

По предложенію предсѣдателя секціи, В. А. Марковичу выражена благодарность за предоставленіе въ распоряженіе членовъ секціи извѣстнаго количества экземпляровъ брошюры докладчика подъ заглавіемъ: «Къ докладу В. А. Марковича о желательныхъ измѣненіяхъ въ преподаваніи теоріи и практики логарифмовъ».

Х. О графическомъ методѣ рѣшенія системы уравненій.

Докладъ Д. Э. Тейнера (Сиб.).

«Въ новыхъ теченіяхъ въ области преподаванія математики и въ частности алгебры въ среднихъ и даже низшихъ уч. заведеніяхъ ясно сказались тенденціи снабжать графическими иллюстраціями зависимости, выраженные аналитически, а также давать рѣшенію ур-ій геометрическаго интерпретаци.

Рѣшеніе ур-ія 1-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ можетъ трактоваться, какъ пересѣченіе прямой вида $y = ax + b$ съ осью x — оу. Система двухъ ур-ій разрѣшается графически розысканіемъ координатъ точки пересѣченія ихъ. По этому и исчерпывается вопросъ о графическихъ интерпретаціяхъ рѣшенія системы линейныхъ ур-ій.

Настоящій докладъ имѣетъ цѣлью показать возможность графическаго рѣшенія на плоскости системы болѣе 2-хъ ур-ій и значеніе этого приѣма, какъ иллюстраціи координированнаго измѣненія двухъ величинъ.

Пусть имѣемъ

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0 \\ f_2(x, y, z) &= 0 \\ f_3(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I),$$

гдѣ функціи f_1 , f_2 и f_3 имѣютъ видъ

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1.$$

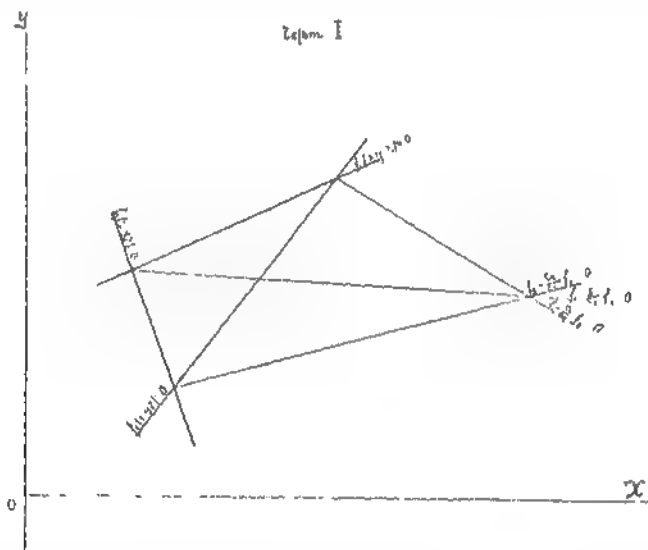
Дадимъ z произвольное значеніе z_1 , тогда система ур-ій (I) дастъ новую систему

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z_1) &= 0 \\ f_2(x, y, z_1) &= 0 \\ f_3(x, y, z_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (II),$$

причемъ въ каждое уравненіе будутъ входить двѣ переменныя. А потому на плоскости можно построить прямая, отвѣча-

ющія каждому изъ ур-ій системы (II). Построивъ три прямыя системы (II), получимъ, вообще говоря, 3 точки ихъ пересѣченія, см. черт. I.

Начнемъ теперь разсматривать z , какъ переменный параметръ. Тогда каждому значенію z будетъ отвѣчать определенная система 3-хъ, вообще говоря, пересѣкающихся прямыхъ, всегда параллельныхъ соответственно прямымъ другой системы,



Черт. I.

полученной при другомъ какомъ-либо значеніи z (коэффициенты при x и y отъ z не зависятъ).

Докажемъ, что точки пересѣченія каждой пары прямыхъ будутъ двигаться по прямой и что эти послѣднія прямыя (всѣ 3), въ случаѣ если система I имѣетъ корни, пересѣкутся въ одной точкѣ при некоторомъ определенномъ значеніи z_0 , одинаковомъ для всѣхъ 3-хъ ур-ій. Ур-іе

$$f_1(x, y, z_1) + l_1 f_2(x, y, z_1) = 0 \quad (III)$$

представляетъ общій видъ ур-ій всѣхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$f_1(x, y, z_1) = 0 \text{ и } f_2(x, y, z_1) = 0.$$

Въ ур-ніи (III) l_1 можно давать произвольныя значенія въ томъ числѣ и такое, при которомъ члены, содержащіе z , исчезнутъ. Для этого стоитъ лишь положить $l_1 = -\frac{c_1}{c_2}$.

При такомъ значеніи l_1 ур-іе будетъ удовлетворяться координатами точекъ пересѣченія прямыхъ f_1 и f_2 , отвѣчающихъ любымъ значеніямъ z .

Пусть нѣкоторому значенію z_1 отвѣчаетъ точка пересѣченія прямыхъ f_1 и f_2 , координаты которой будутъ x_2 и y_2 . Тогда имѣетъ мѣсто слѣдующее тождество:

$$f_1(x_2, y_2, z_1) + l f_2(x_2, y_2, z_1) = 0 \quad (IV)$$

при любомъ значеніи l , а, слѣдовательно, и при $l = -\frac{c_1}{c_2}$, при которомъ члены, содержащіе z_1 , сократятся и тождество это не нарушится, если на мѣсто z_1 подставить любое значеніе въ томъ числѣ и z ; при этомъ тождество (IV) приметъ видъ:

$$f_1(x_2, y_2, z_1) + l_1 f_2(x_2, y_2, z_1) = 0 \quad (V),$$

которое можно разсматривать, какъ полученное изъ ур-ія (III) путемъ подстановки въ него координатъ x_2 и y_2 точки пересѣченія прямыхъ f_1 и f_2 , отвѣчающихъ значенію z , отличному отъ z_1 . Отсюда слѣдуетъ, что координаты точки пересѣченія прямыхъ f_1 и f_2 , отвѣчающихъ любому значенію z , удовлетворяютъ ур-ію

$$f_1(x, y, z_1) - \frac{c_1}{c_2} f_2(x, y, z_1) = 0, \quad (VI)$$

гдѣ вмѣсто z_1 можно взять любое число, хотя-бы и 0, при которомъ V приметъ видъ

$$f_1(x, y, 0) - \frac{c_1}{c_2} f_2(x, y, 0) = 0 \quad (VII)$$

Итакъ, точки пересѣченія прямыхъ $f_1 = 0$; $f_2 = 0$ и $f_2 = 0$, $f_1 = 0$, взятыхъ попарно, лежатъ на прямыхъ, ур-ія которыхъ получаются путемъ исключенія z изъ ур-ій системы (1).

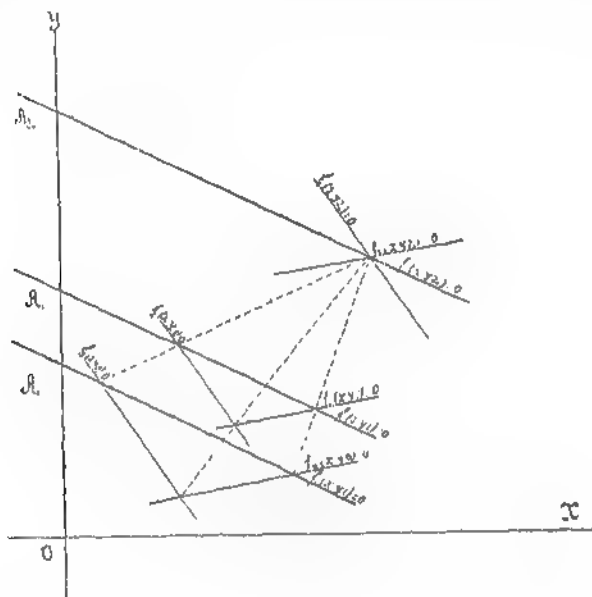
Примѣняя приведенныя выше разсужденія къ точкамъ пересѣченія f_1 съ f^3 и f^2 съ f_3 , получимъ слѣдующія три ур-ія

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, 0) - \frac{c_1}{c_2} f_2(x, y, 0) &= 0 (1) \\ f_1(x, y, 0) - \frac{c_1}{c_3} f_3(x, y, 0) &= 0 (2) \\ f_2(x, y, 0) - \frac{c_1}{c_3} f_3(x, y, 0) &= 0 (3) \end{aligned} \right\} \text{ (VIII)}$$

Ур-іе 3-е изъ (VIII) принадлежать къ типу

$$f_1(x, y, 0) - \frac{c_1}{c_2} f_2(x, y, 0) - l[f_1(x, y, 0) - \frac{c_1}{c_3} f_3(x, y, 0)] = 0, \quad \text{(IX)}$$

а именно, при $l = 1$, ур-іе (IX) даетъ ур-іе 3-е изъ системы (VIII).



Черт. 2.

Слѣдовательно, третья прямая проходитъ черезъ точку пересѣченія первыхъ двухъ.

Остается показать, что если черезъ точку пересѣченія провести три прямыхъ $f_1(x, y, z_0) = 0$, $f_2(x, y, z_0') = 0$ и $f_3(x, y, z_0'') = 0$, то значеніе $z_0 = z_0' = z_0''$.

Дѣйствительно, если $f_2(x_0, y_0, z_0) = 0$, гдѣ x_0 и y_0 суть координаты точки пересѣченія, то изъ ур-ія VI слѣдуетъ, что $f_1(x_0, y_0, z_0) = 0$; но $f_2(x_0, y_0, z_0')$ также $= 0$, слѣдовательно, $z_0' = z_0$; такъ же можно показать, что и $f_3(x_0, y_0, z_0) = 0$;

откуда слѣдуетъ, что прямыя $f_1(x, y, z_0) = 0$; $f_2(x, y, z_0) = 0$ и $f_3(x, y, z_0) = 0$ проходятъ черезъ точку x_0, y_0 .

Остается показать, какимъ образомъ графически опредѣлить величину z_0 .

Положимъ, мы построили систему прямыхъ $f_1(x, y, 0) = 0$, $f_2(x, y, 0) = 0$ и $f_3(x, y, 0) = 0$, другую систему $f_1(x, y, 1) = 0$, $f_2(x, y, 1) = 0$ и $f_3(x, y, 1) = 0$ и третью систему $f_1(x, y, z_0) = 0$; $f_2(x, y, z_0) = 0$ и $f_3(x, y, z_0) = 0$ (см. черт. 2). Продолжимъ всѣ три прямыхъ f_i до пересѣченія съ осью y . Тогда отрѣзокъ $A_0 A_1$ дастъ величину приращенія отрѣзка на оси y при приращеніи z на 1 (отъ 0 до 1), а отрѣзокъ $A_0 A_{z_0}$ представить приращеніе отрѣзка на оси y , отвѣчающее приращенію z отъ 0 до величины z_0 . А т. к. приращеніе отрѣзка на оси y пропорціонально приращенію z , то для полученія значенія z_0 стоитъ лишь измѣрить $A_0 A_{z_0}$ при помощи отрѣзка $A_0 A_1$.

Такимъ образомъ между рѣшеніемъ системъ ур-ій путемъ исключенія неизвѣстнаго и графическимъ рѣшеніемъ устанавливается полная аналогія. Приводимый приемъ служитъ не только для иллюстраціи рѣшенія системы ур-ій, но и для уясненія линейной функціональной зависимости и того, что если измѣненіе свободныхъ членовъ ур-ій будетъ подчинено опредѣленному закону, то движеніе точки пересѣченія прямыхъ будетъ происходить по опредѣленному закону. Именно, если приращеніе свободныхъ членовъ ур-ій будетъ пропорціонально другъ другу, то точка пересѣченія прямыхъ будетъ двигаться по прямой.

Нетрудно показать, что приведенный приемъ можетъ быть распространенъ и на систему болѣе трехъ ур-ій.

Возьмемъ систему линейныхъ ур-ій

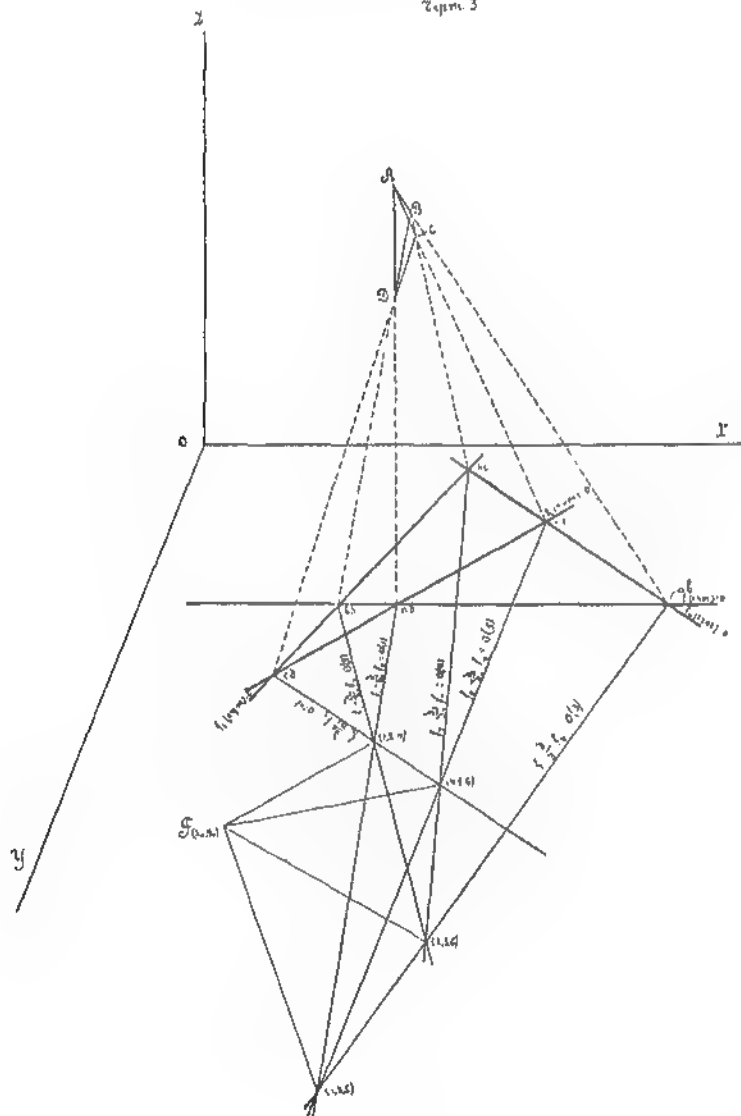
$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z, t) &= 0 \\ f_2(x, y, z, t) &= 0 \\ f_3(x, y, z, t) &= 0 \\ f_4(x, y, z, t) &= 0 \end{aligned} \right\} (X),$$

гдѣ f_1, f_2, f_3 и f_4 —функціи вида $a_1x + b_1y + c_1z + d_1t + e_1$.

Дадимъ t произвольное значеніе t_1 , тогда система (X) дастъ:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z, t_1) &= 0 \\ f_2(x, y, z, t_1) &= 0 \\ f_3(x, y, z, t_1) &= 0 \\ f_4(x, y, z, t_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(XI).}$$

Черт. 3



Черт. 3.

Каждое изъ ур-ій системы (XI) представляетъ ур-іе плоскости, отнесенное къ системѣ трехъ координатъ; плоскости эти, вообще говоря, пересекаются, ограничивая нѣкоторый тетраэдръ $ABCD$ (см. черт. 3).

Слѣды же этихъ плоскостей на плоскости $X Y$ дадутъ 4 прямыя, пересекающіяся въ 6 точкахъ ab, ac, ad, bc, bd и cd .

Ур-ія слѣдовъ будутъ:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z, t_1) &= 0 \\ f_2(x, y, z, t_1) &= 0 \\ f_3(x, y, z, t_1) &= 0 \\ f_4(x, y, z, t_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (XII).}$$

Если t трактовать, какъ переменный параметръ, то:

1) плоскости начнутъ перемѣщаться параллельно самимъ себѣ;

2) прямыя ихъ пересѣченія будутъ двигаться въ нѣкоторыхъ плоскостяхъ;

3) пересѣченіе этихъ плоскостей будетъ происходить частью по три по общей прямой, частью по двѣ;

4) соответственно 2) и 3) пересѣченіе слѣдовъ плоскостей (XI) будетъ перемѣщаться по прямымъ, которыя пересекутся частью по три, частью по двѣ;

5) наступитъ моментъ при нѣкоторомъ t_0 , когда всѣ плоскости пересекутся въ одной точкѣ.

Первое слѣдствіе явствуетъ изъ того, что коэффициенты при x, y и z отъ t не зависятъ. Чтобы вывести 2-ое слѣдствіе, замѣтимъ, что общій видъ ур-ій всѣхъ плоскостей, проходящихъ черезъ пересѣченіе плоскостей f_1 и f_2 , будетъ:

$$f_1(x, y, z, t_1) + l_1 f_2(x, y, z, t_1) = 0 \quad \text{(XIII).}$$

Если положить $l_1 = -\frac{d_1}{d_2}$, то (XIII) даетъ ур-іе плоскости, въ которой лежатъ всѣ прямыя пересѣченія плоскостей $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$, т. к. ур-іе (XIII) при $l_1 = -\frac{d_1}{d_2}$ отъ l не зависитъ.

Уравненія плоскостей, содержащихъ всѣ прямыя пересѣченія плоскостей, поварно будутъ:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z, t) - \frac{d_1}{d_2} f_2(x, y, z, t) &= o(1) \\ f_1(x, y, z, t) - \frac{d_1}{d_3} f_3(x, y, z, t) &= o(2) \\ f_1(x, y, z, t) - \frac{d_1}{d_4} f_4(x, y, z, t) &= o(3) \\ f_2(x, y, z, t) - \frac{d_2}{d_3} f_3(x, y, z, t) &= o(4) \\ f_2(x, y, z, t) - \frac{d_2}{d_4} f_4(x, y, z, t) &= o(5) \\ f_3(x, y, z, t) - \frac{d_3}{d_4} f_4(x, y, z, t) &= o(6) \end{aligned} \right\} \text{(XIV)}$$

Положивъ въ нихъ $z=0$, получимъ ур-ія слѣдовъ на плоскости XY .

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, 0, t) - \frac{d_1}{d_2} f_2(x, y, 0, t) &= o(1) \\ f_1(x, y, 0, t) - \frac{d_1}{d_3} f_3(x, y, 0, t) &= o(2) \\ f_1(x, y, 0, t) - \frac{d_1}{d_4} f_4(x, y, 0, t) &= o(3) \\ f_2(x, y, 0, t) - \frac{d_2}{d_3} f_3(x, y, 0, t) &= o(4) \\ f_2(x, y, 0, t) - \frac{d_2}{d_4} f_4(x, y, 0, t) &= o(5) \\ f_3(x, y, 0, t) - \frac{d_3}{d_4} f_4(x, y, 0, t) &= o(6) \end{aligned} \right\} \text{(XV)}$$

Третье слѣдствіе вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній: черезъ линію пересѣченія первой и второй плоскости изъ системы (XIV) пройдетъ и четвертая, ибо ур-іе ея принадлежитъ къ виду

$$f_1 + l_1 f_2 + \lambda_1 [f_1 + l_2 f_3] = 0 \dots \dots \dots \text{(XVI)}$$

если λ_1 положить $= -1$.

Плоскости первая и третья пересѣкутся съ плоскостью пятой по общей прямой по той же причинѣ.

По черезъ прямую пересѣченія второй и пятой плоскостей не пройдетъ ни одна изъ остальныхъ плоскостей, ибо ни одно изъ остальныхъ ур-ій не принадлежитъ къ виду

$$f_1 + l_2 f_3 + \lambda [f_2 + l_5 f_4] = 0 \dots \dots \dots \text{(XVII)}$$

Откуда слѣдуетъ, что вершины тетраэдра двигаются по прямымъ.

Чтобы вывести 5-ое слѣдствіе, надо показать, что всѣмъ плоскостямъ, проходящимъ черезъ одну общую имъ всѣмъ точку, отвѣчаетъ одно и то же значеніе параметра t_0 .

Пусть x_0, y_0, z_0 координаты точки пересѣченія трехъ плоскостей (1), (2) и (3) изъ системъ (XIV). Можно показать, что (4), (5) и (6) удовлетворяются тѣми же координатами x_0, y_0, z_0 , ибо (1) и (2) даютъ

$$-\frac{d_1}{d_2} f_2 + \frac{d_1}{d_3} f_3 = f_2 - \frac{d_2}{d_3} f_3 = 0$$

и т. д.

Но т. к. точка x_0, y_0, z_0 лежитъ на плоскости движенія линіи пересѣченія плоскостей $f_1(x, y, z, t) = 0$ и $f_2(x, y, z, t) = 0$, если трактовать t , какъ переменный параметръ, то координаты x_0, y_0, z_0 , при некоторомъ опредѣленномъ значеніи t , равномъ t_0 , одинаковымъ для обѣихъ плоскостей, удовлетворяютъ и $f_1(x, y, z, t) = 0$ и $f_2(x, y, z, t) = 0$.

Изъ тѣхъ же соображеній слѣдуетъ, что координаты x_0, y_0, z_0 и t_0 удовлетворяютъ также ур-ніямъ $f_3 = 0$ и $f_4 = 0$. Иначе говоря, существуетъ такое значеніе t , при которомъ всѣ плоскости $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ и $f_4 = 0$ пересѣкаются въ одной точкѣ.

Имѣя это въ виду, ясно, что если начать двигать плоскость XY параллельно самой себѣ, то всѣ точки пересѣченія второй группы прямыхъ, начавъ двигаться по прямымъ, пересѣкутся въ одной точкѣ, координаты которой суть корни системы; чтобы найти значенія y и t , удовлетворяющія данной системѣ, можно прибѣгнуть къ приему, данному выше для нахождения y въ системѣ трехъ ур-ій.

Ходъ графическаго рѣшенія системы четырехъ ур-ій съ 4 переменными будетъ слѣдующій: задаемъ произвольное значеніе для z и t , напримѣръ, по 0, и строимъ прямые:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, 0, 0) &= 0 \\ f_2(x, y, 0, 0) &= 0 \\ f_3(x, y, 0, 0) &= 0 \\ f_4(x, y, 0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Оставляя $z = 0$, беремъ для t другое значеніе, напримѣръ, 1; строимъ вторую систему прямыхъ

$$f_1(x, y, 0, 1) = 0$$

$$f_2(x, y, 0, 1) = 0$$

$$f_3(x, y, 0, 1) = 0$$

$$f_4(x, y, 0, 1) = 0$$

Соотвѣтственныя точки ихъ пересѣченія соединяемъ прямыми, которыя пересѣкутся по три и по двѣ въ семи точкахъ. Затѣмъ, давая частныя значенія z , получимъ движеніе этихъ точекъ по прямымъ, пересѣкающимся въ одной точкѣ координаты которой (x_0 и y_0) будутъ корнями системы ур-ій (X). Корни z_0 и t_0 получимъ, измѣривъ приращеніе отсѣкаемаго отъ оси y -ковъ отрѣзка одною изъ прямыхъ, подобно тому какъ это указано выше для случая трехъ ур-ій.

Указанный приѣмъ рѣшенія системы уравненій возможно распространить и на систему, состоящую изъ большого числа ур-ій съ большимъ числомъ переменныхъ».

По предложенію председателя секціи, докладчику была выражена благодарность за его интересный и не содержащій въ себѣ ничего спорнаго докладъ, представляющій собою цѣнный вкладъ въ ученіе о геометрической интерпретаціи свойствъ системы уравненій. Пренія же, за позднимъ временемъ, не состоялись.

Четвертое засѣданіе.

2 Января 1912 г. 8 час. веч.

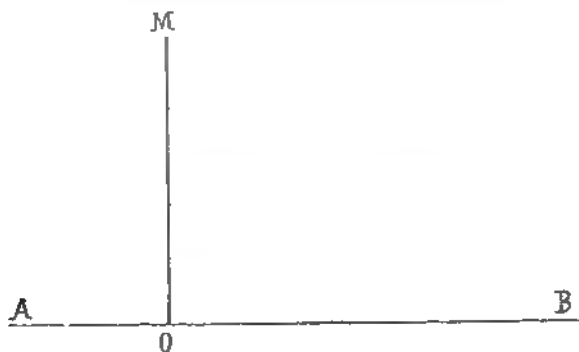
XI. О первой теоремѣ элементарной геометріи Евклида.

Докладъ И. М. Травчцова (Сиб.).

«Французскіе математики, съ Межандромъ во главѣ, до сего времени, интерпретировавъ «Начала» Евклида, въ числѣ начальныхъ теоремъ продолжаютъ ставить слѣдующую: «Изъ точки, взятой на прямой въ плоскости, можно въ этой плоскости возставить перпендикуляръ къ этой прямой, и притомъ только одинъ». Всѣмъ извѣстное доказательство этой теоремы «вращеніемъ другой прямой» не вызываетъ сомнѣнія въ возможности существованія такого перпендикуляра, но не даетъ указанія на направленіе его. Между тѣмъ, этотъ недостатокъ доказательства вліяетъ на доказательство возможности существованія биссектрисы угла и на доказательство существованія середины отрезка прямой. Нѣкоторые математики (напр., Raffali, въ 1896 г.), для строгаго обоснованія вышеуказанной теоремы, измѣнили порядокъ теоремъ и на первый планъ въ основу разсужденій положили «допущеніе существованія середины отрезка» и на основаніи этого доказываютъ возможность одной середины, затѣмъ—существованіе биссектрисы угла и, наконецъ, существованіе перпендикуляра къ прямой, проведеннаго изъ данной на ней точки. Въ настоящемъ докладѣ, безъ всякаго новаго допущенія и съ устраненіемъ выше указаннаго недостатка, представляю строгое доказательство теоремы о перпендикулярѣ къ прямой въ данной на ней точкѣ измѣненіемъ порядка теоремъ, ставя первую слѣдующую теорему:

Теорема I. Изъ точки, взятой внѣ прямой, можно провести такую сѣкущую и притомъ только одну, которая съ данной прямой образуетъ два равныхъ между собою смежныхъ угла.

Доказательство. а) Дана прямая AB и точка M внѣ ея, требуется изъ точки M провести такую сѣкущую къ прямой AB , чтобы образовались два равныхъ между собою смежныхъ угла. Перегнемъ плоскость, въ которой лежатъ данная прямая и точка, и совмести́мъ верхнюю часть плоскости съ нижнею: тогда точка M совпадетъ съ нѣкоторой точкой N нижней части плоскости. Развернувъ чертежъ, соединимъ точки M и N прямою MN , которая образуетъ съ прямой AB два смежныхъ и равныхъ угла MOB и NOB , потому что при вторичномъ

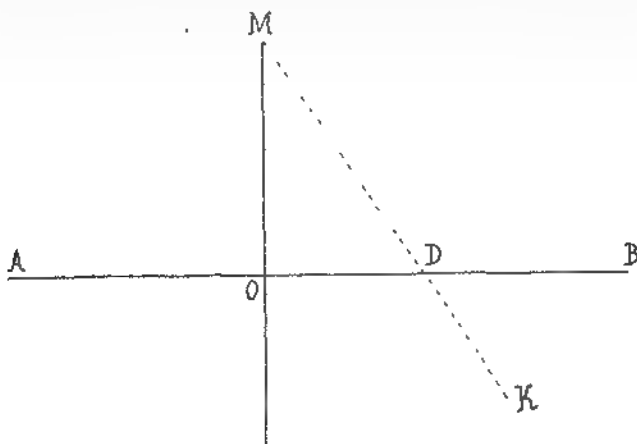


Черт. I.

наложеніи верхней части плоскости на нижнюю вершина O и стороны угла MOB совпадутъ съ вершиной и сторонами угла NOB . б) Чтобы доказать, что MN единственная сѣкущая, обладающая этимъ свойствомъ, допустимъ существованіе еще одной сѣкущей MK , образующей съ прямою AB два равныхъ между собою смежныхъ угла MOB и KOB . Взявъ $OK = OM$, перегнемъ плоскости по прямой AB ; тогда точка M совпадетъ съ точкой K , такъ какъ $MOB = KOB$ по предположенію. Но такъ какъ, по построенію, точка M должна упасть въ точку N , то точка KN совпадетъ съ точкою N , и сѣкущая MK сольется съ сѣкущей MN , потому что между двумя точками M и N можно провести одну прямую, слѣдов., нѣтъ дру-

гой сѣкущей, проведенной изъ точки O и образующей съ прямой AB два равныхъ смежныхъ угла.

Опредѣленіе. Прямые OM и AB , образующія два равныхъ смежныхъ угла, называются взаимно-перпендикулярными. Это обозначается такъ: $OM \perp AB$ и $MO \perp AB$. Каждый изъ двухъ равныхъ между собою смежныхъ угловъ называется прямымъ угломъ и обозначается буквою d , такъ что $\angle AOM + \angle AON = 2d$. На основаніи этого опредѣленія нашу теорему можно выразить такъ: «Изъ точки взятой внѣ прямой можно опустить перпендикуляръ къ данной прямой, и притомъ только одинъ».

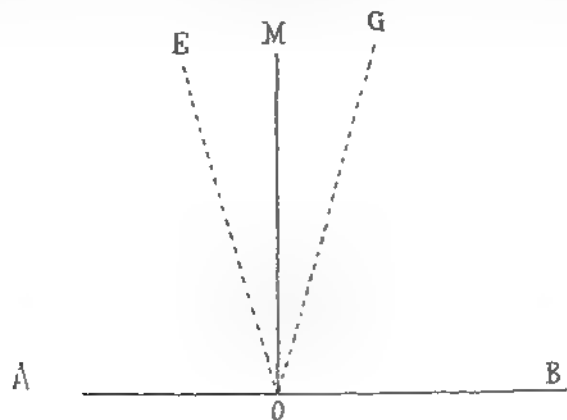


Черт. 2.

Теорема 2. Изъ точки, взятой на прямой, въ данной плоскости можно возставить перпендикуляръ къ этой прямой и притомъ только одинъ.

Доказательство. а) Дана въ плоскости прямая AB и точка O на ней (черт. 3); требуется доказать, что въ этой плоскости можно возставить перпендикуляръ изъ точки O къ прямой AB , притомъ только одинъ. Возьмемъ (черт. 4) прямую CD и точку M внѣ ея; опустимъ изъ точки N перпендикуляръ NK къ прямой CD по предыдущему способу; слѣд. $\angle NKC = \angle NED$ (1), какъ смежные и равные между собою по 1-й теор.; послѣ этого наложимъ плоскость чертежа $OKND$ на плоскость, въ которой лежитъ прямая AB такъ, чтобы

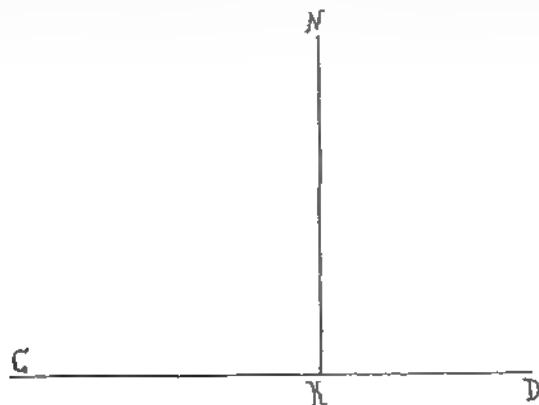
точка N совпала съ точкой O , прямая CD —съ прямой AB , а плоскость угла CKN расположилась надъ прямой AB . Тогда точка N совпадаетъ съ нѣкоторой точкой, которую обозначимъ буквой M . Соединивъ точку M съ точкой O прямою линіей, полу-



Черт. 3.

чимъ, что $MO \perp AB$, потому что $\angle CAO M = \angle CKM$ и $\angle MOB = \angle NKO$ на основаніи совпаденія вершинъ и сторонъ этихъ угловъ при положеніи. Принимая же во вниманіе равенство (1), заключаемъ, что $\angle AOM = \angle BOM$, и слѣд. $MO \perp AB$.

в) Для доказательства того, что OM —единственный перпендикуляръ къ прямой AB въ точкѣ O на ней, предполо-



Черт. 4.

жнмъ существованіе еще одного перпендикуляра EO . Тогда получимъ, что $\angle AOE = \angle BOE$ (1).

Повернувъ чертежъ около OM , получимъ, что, на основаніи равенства $\angle AOM = \angle BOM$, прямая AO совмѣстится съ OB , и прямая OE займетъ положеніе OG ; тогда $\angle AOE = \angle BOG$. Принимая во вниманіе равенство (1), получимъ, что $\angle BOE = \angle BOG$ — что невозможно. Слѣд., нѣтъ другого перпендикуляра изъ точки O въ той же плоскости къ прямой AB .

Далѣе слѣдуютъ уже обычныя теоремы и легко доказать существованіе биссектрисы угла и середины отрезка прямой».

Т е н и с ы.

1. Можно доказать существованіе перпендикуляра къ прямой въ данной на ней точкѣ съ указаніемъ точнаго направленія перпендикуляра.

2. Легко доказываются возможность построенія равнодѣлящей даннаго угла и возможность нахожденія середины даннаго отрезка прямой.

XII. Построеніе параллелограмовъ.

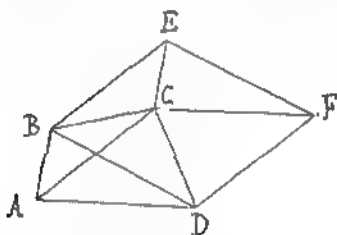
Докладъ И. И. Александрова (Москва).

«Я не безъ намѣренія выбрать сравнительно узкую тему. Во-первыхъ, нежелательно было, чтобы на съѣздѣ ни разу не была тронута тема геометрическихъ задачъ на построеніе, имѣющихъ, какъ извѣстно, громадное педагогическое значеніе. Казалось, во-вторыхъ, что мои геометрическія построенія, которыя появляются здѣсь въ первый разъ и, насколько возможно судить, не встрѣчались въ литературѣ, не будутъ интересными всему собранію. И, въ третьихъ, и главнымъ образомъ, мнѣ хотѣлось вновь подчеркнуть, что геометрическими задачами на построеніе средняя школа стала заниматься

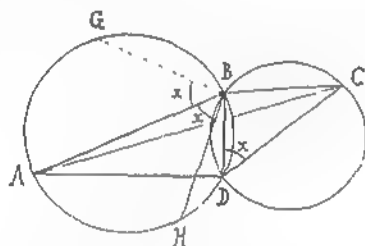
меньше, въ чемъ я вижу несомнѣнную и довольно крупную ошибку.

Извѣстно, что построение параллелограмовъ приводится къ построению треугольниковъ; такого рода задачи считаются сотнями. Уже гораздо рѣже задачи обратнаго характера, въ которыхъ построение треугольниковъ приводится къ построению параллелограмовъ; такіа задачи можно считать лишь пятками.

Извѣстно далѣе, что если въ четырехугольникѣ $ABCD$, который называютъ основнымъ, перенести параллельно AB въ CE и AD въ CF , то составится параллелограмъ $BEFD$, имѣющій многія свойства. Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда данныя элементы четырехугольника позволяютъ построить этотъ параллелограмъ и опредѣлить въ немъ точку C' , легко отъ



Черт. 1.



Черт. 2.

параллелограма перейти къ основному четырехугольнику обратнымъ перенесеніемъ сторонъ. Такого рода задачи встрѣчаются десятками. Спрашивается, нѣтъ ли цѣлаго класса задачъ обратнаго характера, т. е. задачъ на построение параллелограмовъ, которыя приводились бы къ построению основнаго четырехугольника. Такого рода идея, какъ я убѣжденъ, не должна бы быть новою, но, однако, я не могъ найти въ литературѣ ни этой идеи, ни задачъ такого характера. Ниже показано, что задачи такого рода существуютъ ¹⁾, что всѣ они съ перваго взгляда поражаютъ своей необычною трудностью, однако, довольно легко рѣшаются, если слѣдовать принципу сведенія

¹⁾ Тема доклада со всѣми подробностями напечатана въ Московскомъ журналѣ «Математическое образованіе».

одной задачи на другую. Изъ имѣющихся у меня примѣровъ выбираю одинъ наиболѣе характерный.

1. Даны 4 прямыя, выходящія изъ точки C . Построить параллелограммъ $BEFD$ съ даннымъ угломъ такъ, чтобы вершины его лежали на данныхъ прямыхъ и чтобы сумма расстояній вершинъ отъ точки C были данной длины.

Въ основномъ четырехугольникѣ $ABCD$, какъ легко видѣть, извѣстны углы, уголъ между діагоналями и периметръ. Испытаемъ методъ подобія: ясно, что если мы сумѣемъ опредѣлить форму искомаго четырехугольника, то уже легко будетъ дать ему надлежащіе размѣры. Замѣчаемъ, что разность угловъ $ABD - BDC = 180^\circ - A - ADB = (D - BDA) = 180^\circ - A - D$; и потому эти разности извѣстны.

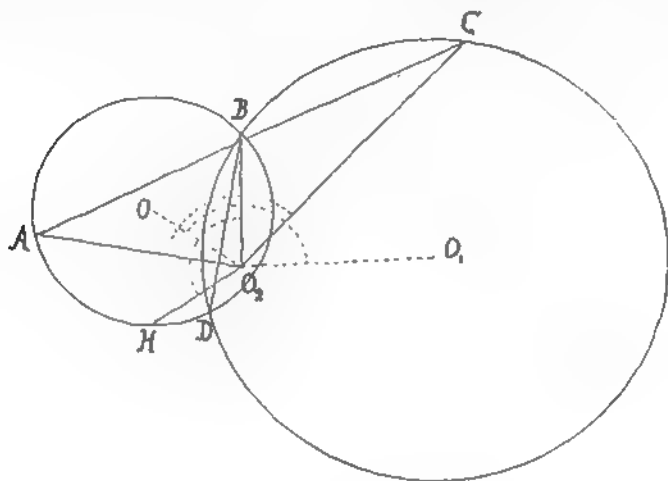
Поэтому, если на произвольной прямой bd опишемъ дуги, вмѣщающія углы A и C , то задача приводится къ слѣдующей.

2. На двухъ пересекающихся въ B и D окружностяхъ отыскать по точкѣ A и C такъ, чтобы направление AC и разность угловъ ABD и BDC были даныя.

Если мы попробуемъ уравнять искомыя углы ABD и BDC , т. е., если мы отложимъ уголъ IBD , равный данной разности, то точка I намъ будетъ извѣстна, дуги же AI и BC будутъ имѣть одинаковую мѣру. Поэтому задача приведена къ слѣдующей:

3. На двухъ окружностяхъ O и O_1 даны точки B и H . Отыскать на нихъ еще по точкѣ a и c такъ, чтобы дуги AH и BC были подобны, а направление ac было данное (условіе пересѣченія окружностей дѣлается лишнимъ). Эта задача, несомнѣнно, развилась, какъ обобщеніе одной изъ задачъ Аполлонія Пергейскаго, и рѣшеніе ея извѣстно. Именно, если O_2 есть центръ вращенія, совмѣщающаго дугу AH съ BC , то тр-ки HO_2B и AO_2C подобны: слѣд., для рѣшенія достаточно изъ точки O_2 провести двѣ прямыя, встрѣчающія данное направление подъ извѣстными углами. Такъ какъ задача 3-я имѣетъ одно рѣшеніе, то заключаемъ: 1) данная задача имѣетъ тоже одно рѣшеніе; 2) углы четыре-

угольника выѣстъ съ угломъ его діагоналей вполнѣ опредѣляютъ видъ четырехугольника. Очевидно, что выѣсто периметра основнаго четырехугольника можно было дать его площадь, или сумму діагоналей, или вообще какое-нибудь данное, опредѣляющее размѣры четырехугольника. Соответственно измѣнятся данные и параллелограмма. Ясно, что этого рода задачи можно варіировать безъ конца, что дѣлаетъ основную мысль доклада методически цѣнной, тѣмъ болѣе, что, очевидно, ее легко распространить и на многоугольники. Въ одномъ изъ



Черт. 3.

своихъ докладовъ¹⁾ я проводилъ болѣе широкую мысль, а именно: «рѣшить задачу на построеніе это значитъ открыть первообразъ искомой фигуры, т. е., тотъ геометрический зародышекъ, изъ котораго развилась искомая фигура путемъ различныхъ преобразованій». Родоначальникомъ искомыхъ фигуръ всегда и неизмѣнно являлся тогда треугольникъ. Такъ и въ нашемъ примѣрѣ. Вся задача развилась изъ треугольника AO_2H . Сначала этотъ треугольникъ былъ умноженъ и повернутъ на нѣкоторый уголъ; получился треугольникъ BO_2C . Тогда

¹⁾ См. отдѣльную брошюру «О составленіи и рѣшеніи задачъ на вращеніе» И. Александрова или «Вѣстн. Од. Физики» 1895 г.

опредѣляется окружность O , которая, при поворотѣ на тотъ же уголъ, преобразовывается въ окружность O_1 ; опредѣляется точка D , направление AC можно взять за известное, и т. д. Такъ что высказанная тогда идея оказывается и на этотъ разъ вѣрною».

XIII. Принципъ совмести́мости плоскихъ и пространственныхъ фигуръ.

Докладъ Е. С. Томашевича (Москва).

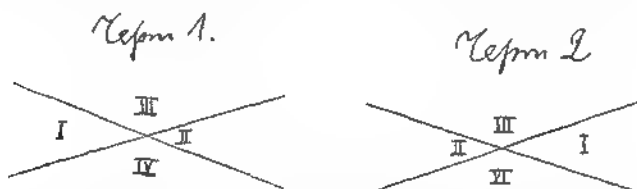
«Я долженъ прежде всего объяснить нѣсколько претенціозное заглавіе своего доклада. Можно было бы сказать: «методъ наложенія». Но тогда пришлось бы спросить, какимъ другимъ, болѣе или менѣе равносильнымъ, можетъ быть замѣнить этотъ методъ? До тѣхъ поръ пока интуиція не будетъ изгнана изъ элементарной геометріи (а этого, вѣроятно, никогда не будетъ), — наложеніе или, точнѣе, совмѣщеніе фигуръ всегда будетъ занимать свое мѣсто въ элементарномъ курсѣ. Исключать его и замѣнять чѣмъ-нибудь болѣе простымъ не придется. Совмѣщеніе фигуръ нѣчто больше, чѣмъ методъ.

Э. Борель въ своей *Géométrie* (1908, р. 24) говоритъ, между прочимъ, объ отпечаткахъ, такъ или иначе получаемыхъ съ имѣющихся плоскихъ фигуръ. Но онъ это дѣлаетъ для того, чтобы оправдать существованіе у плоскости двухъ сторонъ. Я же хочу обратить вниманіе на эти отпечатки съ другой точки зрѣнія. Прежде всего, я считаю плоскость принадлежностью какого-нибудь тѣла, и потому пользоваться оборотною стороною ея, вообще говоря, не признаю возможнымъ, да въ этомъ и не вижу надобности.

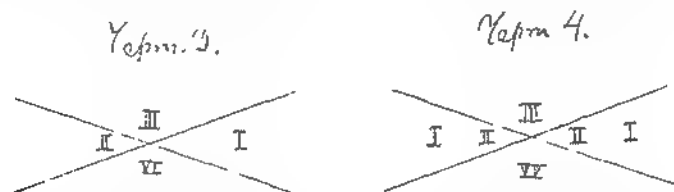
Чтобы быть яснѣе, я укажу на литографскій процессъ. Мы пишемъ сперва на бумагѣ, затѣмъ написанное переводимъ на плоскость литографскаго камня, а оттуда—снова на бумагу. Мы можемъ представить себѣ, что съ этой послѣдней можно перевести еще разъ на камень или на другую бумагу, и т. д. Написанное въ первый разъ назовемъ оригиналомъ, отпечатки

же на чемъ бы то ни было будемъ отмѣчать нумерами по порядку ихъ полученія. Аналогичное представляетъ фотографический негативъ и снѣмки.

Возьмемъ за оригиналъ двѣ пересекающіяся прямыя (черт. 1) и составляющія углы I, II, III и IV. Сдѣлаемъ съ нихъ на двухъ другихъ плоскостяхъ 2 отпечатка (черт. 2 и 3); реально — со стекляннаго негатива сдѣлаемъ два стеклянныя діапозитива



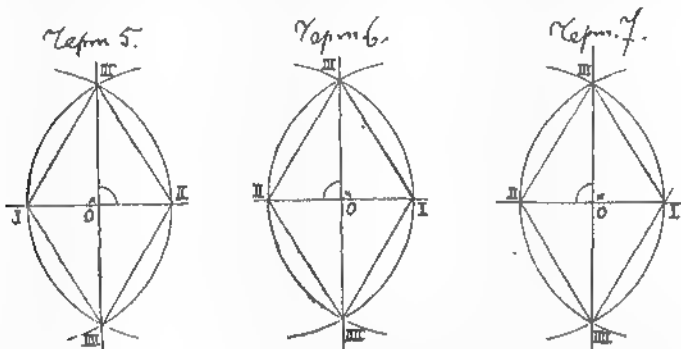
Совместимъ плоскости чертежей 2 и 3 (т. е. діапозитивы) такъ, чтобы углы III и III совпали; тогда совпадутъ и прямыя. Получится фиг. 4, въ которой уголъ II совмѣстится съ I и обратно I со II, слѣд., такъ называемые «вертикальные» углы равны. Подобнымъ же способомъ можно доказать равенство угловъ при основаніи равнобедреннаго треугольника.



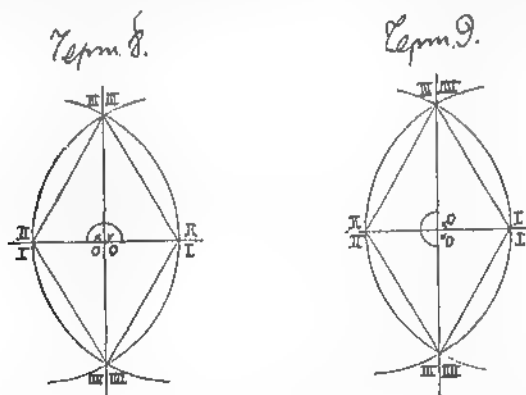
Возьмемъ за оригиналъ фигуру 5, составленную изъ двухъ равныхъ окружностей такъ, что разстояніе ихъ центровъ равно ихъ радіусу. Въ этомъ оригиналѣ проведемъ прямую черезъ точки пересѣченія окружностей и къ этимъ же точкамъ проведемъ радіусы. Съ фигуры 5 получимъ 2 отпечатка (фиг. 6 и 7) и эти отпечатки совместимъ одинъ съ другимъ, начавъ совмѣщеніе съ разстоянія центровъ, т. е. совмѣщая I со II и II съ I.

Здѣсь я опять сошлюсь на Бореля, который въ VIII гл. I-й части говоритъ: «достаточно одного чертежа, чтобы убѣдиться, что 2 окружности могутъ имѣть 2 общія точки».

Совмѣщеніе чертежей 6 и 7 дастъ чертежъ 8, въ которомъ совмѣстятся точки III съ III и IV съ IV, а, слѣд., и



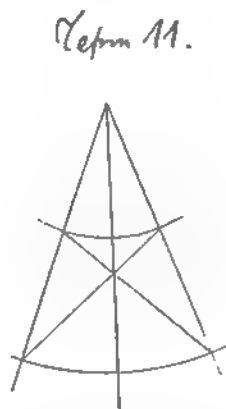
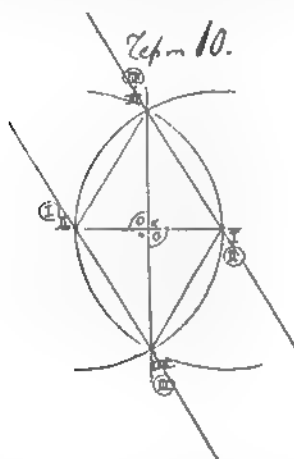
прямая III, IV. Отсюда ясно, что радиусъ OI раздѣляется точкою O пополамъ, прямая II и III IV взаимно перпендикулярны, а углы IOI и $IIII$ раздѣлены прямою III IV пополамъ. Совмѣщеніе чертежей 6 и 7 можно произвести еще



и такъ, чтобы совпали I съ I и II съ II; для этого одинъ изъ отпечатковъ придется предварительно повернуть на выпрямленный уголъ; въ результатъ получится тождественная съ на-

чальной фигура d , которая показываетъ, что общія хорда окружностей раздѣлилась точкою O пополамъ.

Вмѣсто того, чтобы получать съ оригинала отпечатки 6 и 7 каждый въ отдѣльности, постараемся получить ихъ на одномъ и томъ же мѣстѣ, на общемъ радіусѣ, но для полученія 2-го отпечатка повернемъ оригиналъ на выпрямленный уголъ. Получится фигура 10. (Въ кружкахъ поставлены названія точекъ второго отпечатка; иначе они сольются съ названіями точекъ перваго). Если теперь допустить, что прямая I III и II III въ оригиналѣ пересѣклись гдѣ-нибудь, напр., справа вверху, то въ совмѣщенныхъ отпечаткахъ на фиг. 10 эти линіи пе-



ресекутся дважды: слѣва вверху и справа внизу, но двѣ различныя прямая не могутъ имѣть двухъ общихъ точекъ, слѣд., въ оригиналѣ прямая I III и II III должны быть параллельными.

Изъ всего сказаннаго можно видѣть, что одинъ лишь черт. 5 далъ много матеріала для геометрическихъ выводовъ, вовсе не требуя для нихъ обычныхъ теоремъ о равенствѣ треугольниковъ. Мало того, фигуры являются исполненными, т. е. уже построенными, а не какими-то лишь возможными, исполненіе которыхъ отодвигается на дальніе параграфы учебника. И мое всегдашнее искреннее убѣжденіе, что въ элементарномъ

курсы геометрии мы должны изучать фигуры построения, а не подносить учащимся теоремы о фигурах, я скажу, лишь воображаемых. Въ дѣлѣ новомъ воображать можно и должно лишь то, что исполнимо. Отвлеченныя же строго-логическія построения могутъ стать достояніемъ лишь того ума, который приобрѣлъ способность не только отчетливо воспринимать реальныя образы, но и создавать ихъ, т. е., иными словами, имѣть въ своемъ распоряженіи развитое воображеніе.

Для дѣленія угла пополамъ я возьму построение съ двумя концентрическими окружностями (черт. 11). Обычное доказательство правильности его требуетъ трехъ паръ равныхъ треугольниковъ, совмѣщеніе же отпечатковъ, которыхъ я для сокращенія мѣста дѣлать не стану, ни въ чемъ подобномъ не нуждается; оно до очевидности просто. Болѣе обычный способъ дѣленія угла пополамъ требуетъ проведенія трехъ окружностей, но доказательство посредствомъ совмѣщенія отпечатковъ не становится отъ этого труднѣе.

Построеніе угла и проведеніе перпендикуляра требуютъ предварительнаго знакомства съ пересѣченіемъ различныхъ окружностей. Поэтому необходимо заранѣе изучать соотвѣтствующія фигуры.

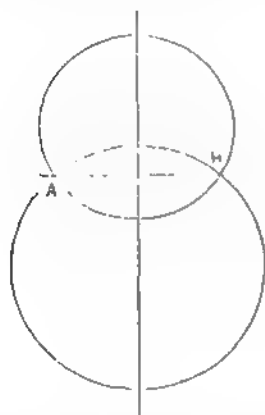
Если оригиналомъ взять фиг. 12, то два отсѣчка съ нея, совмѣщенные одинъ съ другимъ такъ, чтобы совпали центры равныхъ окружностей, дадутъ фиг. 13, въ ней ясно обнаружится перпендикулярность общей хорды AB къ линіи центровъ. Слѣдовательно, для проведенія перпендикуляра изъ точки па прямую, достаточно отмѣтить на этой прямой двѣ какія-нибудь точки и припятъ ихъ за центры окружностей, проходящихъ черезъ данную точку. Обѣ точки пересѣченія окружностей опредѣлятъ положеніе искомаго перпендикуляра.

Слѣдуетъ замѣтить, что вообще всякое построение, въ которомъ можно найти ось симметріи, позволяетъ тотчасъ-же примѣнить къ нему принципъ совмѣстимости и обнаружить то или иное свойство фигуры. Поэтому и болѣе обычный способъ проведенія перпендикуляра изъ точки на прямую, какъ основанный тоже на симметріи, безъ труда оправдывается примѣненіемъ изложенныхъ приемовъ.

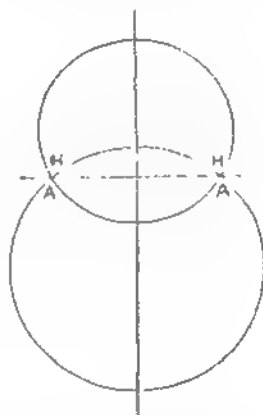
Легко видѣть, что отпечатки съ оригинала представляютъ собою какъ-бы обратную сторону плоскости, на которой помѣщенъ оригиналъ. Поэтому для краткости рѣчи теперь можно согласиться на выраженіе: совмести́мъ чертежъ съ самимъ собою, повернувъ его для этого другой стороной его плоскости. Надо только при этомъ указывать, какія точки остаются на мѣстѣ.

Далѣе можно еще согласиться и на другое выраженіе, которымъ иногда неосмотрительно пользуются, именно: перевернемъ плоскость чертежа по какой-нибудь прямой.

Черт. 12



Черт. 13



Если ABC - данный треугольникъ, то новый треугольникъ съ тѣми же тремя сторонами надо строить такъ. На какой-нибудь прямой откладываемъ послѣдовательно три его стороны AB , BC , CA ; концмъ средней стороны BC принимаемъ за центры окружностей, крайнія стороны за соотвѣтствующіе радіусы. Можно ожидать полученія трехъ различныхъ треугольниковъ, смотря по тому, какая изъ трехъ сторонъ помѣстится въ серединѣ. Однако, этого не случится, если признать за очевидное, что отпечатки двухъ какихъ-либо пересекающихся окружностей всегда могутъ быть совмѣщены одинъ съ другимъ, дѣйствительно, стоитъ лишь въ данномъ треугольникѣ провести соотвѣтствующія окружности, чтобы доказать, что каждый изъ

новыхъ построенныхъ треугольниковъ можетъ быть совмѣщенъ съ даннымъ. Тѣмъ самымъ будетъ, конечно, доказанъ случай равенства треугольника по 3 сторонамъ.

Построеніе угла, равнаго данному, есть слѣдствіе предыдущаго построенія.

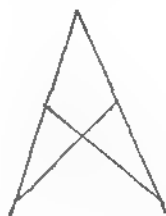
Умѣя строить данный уголъ, можно перейти къ доказательству равенства треугольниковъ по двумъ сторонамъ и углу между ними.

Если мы возьмемъ два треугольника (черт. 15), начерченные на двухъ различныхъ плоскостяхъ, то совмѣщеніе плоскостей еще не приведетъ къ совмѣщенію фигуръ; получится фигура черт. 15. Поэтому нужно съ каждаго треугольника

Черт. 14.



Черт. 15.



получить по отпечатку, но не два отдѣльныхъ, а одинъ на другомъ, начавъ совмѣщенія ихъ съ равныхъ угловъ; въ результатѣ—полное совмѣщеніе треугольниковъ.

Такое посредственное совмѣщеніе данныхъ фигуръ требуетъ видоизмѣненія обычнаго опредѣленія равенства геометрическихъ фигуръ.

Мы будемъ называть геометрически равными тѣ фигуры, которыя могутъ быть совмѣщены одна съ другою или каждая поочередно съ третьей. Это опредѣленіе пригодно и полезно не только въ планиметріи, но съ еще большимъ правомъ можетъ быть использовано въ стереометріи. Можно еще добавить къ этому, что всякія двѣ фигуры, исполненіе которыхъ тождественно, должны быть равны

мелку собою, и равенство это никакого доказательства не требуетъ.

Почему-то принято для отложенія равныхъ отрѣзковъ и равныхъ угловъ прибѣгать непременно къ циркулю. А что, если я, требуя построенія угла, равнаго данному, не позволю на этомъ послѣднемъ ни чертить какія-либо окружности, ни колоть его остріями циркуля? Для рѣшенія задачи я прибѣгаю въ этомъ случаѣ къ транспортиру, но не какъ къ измѣрительному инструменту, а просто, какъ къ вспомогательной переносной плоскости; и мнѣ совершенно нѣтъ дѣла до того, вѣрно-ли у взятаго транспортира поставленъ центръ и правильны-ли дѣленія. Я пользуюсь послѣдними лишь въ качествѣ мѣтокъ, и даже въ случаѣ необходимости самъ ноставлю на транспортирѣ свою мѣтку. За неимѣніемъ транспортира я могу взять произвольной формы кусокъ бумаги и при помощи его отложить данный уголъ, сдѣлавъ на краяхъ бумаги три необходимыя отмѣтки въ то время, когда она будетъ совмѣщена съ даннымъ угломъ.

Для отложенія прямолинейнаго отрѣзка можно употреблять либо масштабъ, либо бумагу, край которой прямолинеенъ.

Я считаю, что переносная плоскость (транспортиръ) есть необходимое пособіе при изученіи основныхъ случаевъ равенства плоскихъ фигуръ.

Говоря о равновеликихъ фигурахъ, безусловно необходимо упомянуть о совмѣстимости ихъ при помощи разрѣзовъ, т. е., иначе, о равновеликости по суммѣ составляющихъ частей. Такъ, напр., очень интересенъ вопросъ о равновеликости двухъ треугольниковъ съ равными основаніями и высотами.

С. И. Шохоръ-Троцкій въ предисловіи къ своей книгѣ «Геометрія на задачахъ, выш. 2-ой, кв. для учащихся» упоминаетъ, между прочимъ, о моемъ способѣ рѣшенія этой задачи.

Я укажу еще на разнообразные случаи совмѣщенія квадрата на гипотенузѣ съ разрѣзанными на части квадратами на катетахъ.

Въ нашихъ учебникахъ говорится въ своемъ мѣстѣ о двугранныхъ углахъ и объ условіяхъ ихъ равенства. Ученики усвоятъ, точнѣе—выучатъ соотвѣтствующія теоремы, но они совершенно не сумѣютъ примѣнить ихъ къ дѣйствительности.

Попробуйте дать имъ для сравненія двугранныхъ угловъ два какіе-нибудь многогранники, деревянныя, картонныя или металлическія, или еще проще, укажите на углы между стѣнами класса и предложите узнать, равны или не равны разсматриваемые двугранные углы, какой изъ нихъ больше и на сколько, сколько градусовъ въ каждомъ, и т. д.

Не сомнѣваюсь, что такимъ вопросамъ ученики будутъ поставлены въ большое затрудненіе.

Конечно, нѣкоторыми будутъ предложены различныя приемы, но безъ того или иного совмѣщенія данныхъ угловъ съ вспомогательными (изъ картона или иного матеріала) дѣло не обойдется. Это и укажетъ на необходимость указанного выше опредѣленія равенства фигуръ.

Будетъ еще лучше, если мы при помощи обрѣзанныхъ подѣ прямымъ угломъ листочковъ бумаги или картона и приложенныхъ къ гранямъ получимъ линейный уголъ, на сторонахъ послѣдняго могутъ быть отложены линейные размѣры отъ вершины или даже отъ произвольно выбранной точки; разстоянія-же между точками на разныхъ плоскостяхъ могутъ быть при помощи циркуля перенесены на плоскость чертежа. составится треугольникъ и четырехугольникъ, углы котораго могутъ быть измѣрены.

Не слѣдуетъ уклоняться и отъ того случая, когда ребро двуграннаго угла притуплено или совершенно отсутствуетъ.

Статью объ измѣреніи двугранныхъ угловъ слѣдуетъ заканчивать указаніемъ на значеніе гониометріи въ кристаллографіи.

На совмѣщеніи многогранниковъ я останавливаться не буду. Я сошлюсь въ этомъ случаѣ прежде всего на «Стереометрію» Н. А. Извольскаго (Геометрія въ пространствѣ. М. 1910). Если мы возьмемъ § 50 этой стереометріи, то въ немъ находимъ указаніе на невозможность совмѣщенія такъ называемыхъ симметричныхъ трехгранныхъ угловъ. Да, дѣлкомъ совмѣщеніе невозможно! Но трехгранный уголъ не пирамида, и его всегда можно разрѣзать на части, изъ которыхъ будетъ сложенъ уголъ симметричный. Для этого слѣдуетъ поступить такъ, какъ разрѣзами и переложеніемъ получается изъ тре-

углольника на плоскости ему симметричный, т. е. взять центръ вписаннаго въ треугольникъ круга, провести въ точки касанія радіусы и по нимъ треугольникъ разрѣзать; можно воспользо-ваться и центромъ описаннаго круга, но лишь въ томъ случаѣ, когда онъ помѣщается внутри треугольника; центръ соединяемъ съ вершинами, и по этимъ линіямъ треугольникъ разрѣзаемъ.

Для перенесенія этихъ приѣмовъ на трехгранный уголъ надобно вообразить сферу съ центромъ въ вершинѣ трехграннаго угла и продѣлать съ получившимся сферическимъ треугольникомъ то, что дѣлали съ плоскимъ. Сферическій треугольникъ, а вмѣстѣ съ нимъ и трехгранный уголъ, должны быть послѣ этого разрѣзаны на три части; одна изъ частей останется на мѣстѣ, а остальные взаимно обмѣняются своими положеніями, какъ если бы онѣ вращались около оси, проходящей черезъ центръ вспомогательнаго круга.

Въ заключеніе замѣчу, что принципомъ совмѣстимости не слѣдуетъ злоупотреблять, какъ не слѣдуетъ, конечно, злоупотреблять и мелочными доказательствами различныхъ свойствъ фигуръ; такъ или иначе полученныя основныя теоремы всегда должны быть на первомъ мѣстѣ; онѣ всегда останутся неизмѣненнымъ фундаментомъ геометріи».

Т е з и с ы.

1. Курсъ геометріи долженъ начинаться изученіемъ легко исполнимыхъ плоскихъ фигуръ, скомбинированныхъ изъ прямыхъ линій и окружностей.

2. Необходимо указать средства получать отпечатки данной плоской фигуры на другой плоскости: сводная бумага, калька, копировальный прессъ, литографія, позитивный фотографическій процессъ и т. п.

3. Съ отпечатковъ могутъ быть получены новые отпечатки, между прочимъ, совмѣщенные съ прежними, вполнѣ или отчасти.

4. Всѣ отпечатки считаются равными оригиналу и между собою, и само опредѣленіе равенства фигуръ можетъ явиться въ такой формѣ: равными фигурами называемъ

такія, которыя могутъ быть совмѣщены одна съ другою или поочередно съ третьей.

5. Предыдущее опредѣленіе распространяется и на пространственныя фигуры: рѣзная металлическая печать и ея сургучныя или мастичныя отпечатки, вафельница и вафли, штампны и штампованныя вещи, монеты, медали, литейныя модели и отливки по нимъ и т. д.

6. Всѣ основныя задачи на построеніе, дѣленіе отрѣзка прямой или угла пополамъ, проведеніе перпендикуляра и т. п. не нуждаются для своего доказательства въ теоремахъ о равенствѣ треугольниковъ; напротивъ, сами построенія даютъ обильный матеріалъ для геометрическихъ теоремъ.

XIV. Роль геодезическихъ упражненій при обученіи математикѣ.

Докладъ Д. М. Гевитуса (Сиб.).

«На всѣхъ, безъ исключенія, ступеняхъ обученія надо считаться съ требованіемъ наглядности. Въ младшихъ классахъ учитель математики можетъ использовать разнообразныя наглядныя пособія; но, по мѣрѣ умственного роста учениковъ, должны павмѣнять свой характеръ и тѣ способы, посредствомъ которыхъ можетъ быть достигнута наглядность обученія. Средніе и старшіе классы нуждаются въ дополнительныхъ приѣмахъ, дѣлающихъ обученіе нагляднымъ. И поскольку рѣчь идетъ о геометріи и тригонометріи, такимъ дополнительнымъ приѣмомъ могутъ съ успѣхомъ служить геодезическія упражненія учащихся.

Чтобы не возникло недоразумѣній, считаю нужнымъ теперь же указать, что я здѣсь имѣю въ виду не введеніе геодезіи въ программу средней школы, ни даже введеніе нѣкоторыхъ геодезическихъ вопросовъ въ курсы геометріи и тригонометріи. Я имѣю въ виду исключительно загородныя экскурсіи учениковъ, во время которыхъ учениками—подъ руководствомъ учителя—могутъ выполняться нѣкоторыя геодезическія работы.

Я не имѣю возможности въ краткомъ докладѣ перечислить всѣ такія упражненія; тѣмъ болѣе не могу и изложить ихъ въ методической послѣдовательности. Я могу лишь нѣсколькими примѣрами охарактеризовать эти работы.

Возможны работы безъ всякихъ инструментовъ, съ однимъ только шнуромъ, раздѣленнымъ узлами на сажени и десятыя ихъ доли. Къ такимъ работамъ я отношу: измѣреніе длины, возстановленіе перпендикуляра, построеніе прямоугольника, угловъ въ 30° , 60° . Эти работы значительно облегчаются, если добавить дешевый приборъ—эккеръ, служащій для возстановленія перпендикуляровъ. Тогда уже съ легкостью разрѣшается рядъ задачъ построения на мѣстности. Этотъ типъ упражненій доступенъ и для младшаго возраста. Я рекомендую, но не ихъ я имѣю въ виду, работы съ болѣе сложными приборами—мензулой и теодолитомъ. При этомъ я предполагаю, что эти приборы снабжены всѣми нужными приспособленіями для установки и провѣрки ихъ, а также и дальномѣрными нитями. Въ школьныхъ коллекціяхъ и теперь встрѣчаются астролябии съ діоптрами, но работа съ такимъ приборомъ даетъ слишкомъ мало матеріала для развитія пространственнаго воображенія учениковъ. Приборы, конечно, должны быть спеціально сконструированы для школы; ихъ можно изготовить сравнительно дешево, если не требовать значительной точности, которой ученики, все равно, не сумѣютъ использовать.

Теперь я назову нѣкоторые отдѣльные упражненія съ указаніемъ тѣхъ отдѣловъ математики, проработкѣ которыхъ они будутъ содѣйствовать.

1. Опредѣленіе разстоянія до рейки, раздѣленной на сотыя доли сажени, при помощи дальномѣрной трубы,—упражненіе, использующее свойства подобныхъ треугольниковъ.

2. Установка мензулы или теодолита по уровню,—упражненіе, чрезвычайно сильно развивающее учениковъ въ области пространственныхъ представленій,—въ частности — въ вопросахъ о взаимной перпендикулярности и параллельности линій и плоскостей въ пространствѣ.

3. Съемка открытаго участка мензулою полярнымъ способомъ.—Упражненія на гомотетію.

4. Проверка главнѣйшихъ условій правильности прибора,—положеніе оси вращенія трубы относительно горизонта и оси визирования относительно оси вращенія. Это упражненіе заставляетъ учениковъ сильно углубиться въ область пространственныхъ соотношеній линій и поверхностей.

Вычерчиваніе плана и измѣреніе по плану даетъ возможность, практически встрѣтиться съ вопросомъ о свойствахъ подобныхъ фигуръ, съ приемами вычисленія площадей, вообще же—выдѣлать математику, какъ ученіе о косвенномъ измѣреніи.

Когда ученики ознакомились съ тригонометріей, геодезическія упражненія даютъ массу поводовъ поработать любую главу изъ математическихъ отдѣловъ тригонометрии. Тригонометрическое нивелированіе и опредѣленіе высотъ недоступныхъ предметовъ даетъ для этого богатый матеріалъ. Ознакомленіе съ накладкою на планъ по координатамъ также будетъ не безполезнымъ.

Детальной разработкѣ вопроса о геодезическихъ экскурсіяхъ учащихся должны быть посвящены особыя работы.

Цѣлью моего доклада было лишь напомнить учителямъ математики объ этой отрасли прикладной математики и выдѣлать рядъ упражненій, имѣющихъ характеръ не только приложенія изученнаго къ практикѣ, но и заставляющихъ ученика видѣть въ пространствѣ неначерченные линіи. Эта сторона дѣла мнѣ кажется чрезвычайно важною; ей отвѣчаютъ упражненія по установкѣ и проверкѣ приборовъ.

Въ заключеніе скажу, что мой опытъ въ дѣлѣ устройства геодезическихъ экскурсій внушаетъ мнѣ увѣренность въ чрезвычайной пользѣ ихъ какъ со спеціальной математической точки зрѣнія, такъ и съ общенадагогической. Эти упражненія развиваютъ глазомѣръ, даютъ большую работу воображенію; ставятъ на свое мѣсто экспериментъ и логически построенное рассужденіе. Они показываютъ ученику необходимость приближенныхъ вычисленій и научаютъ его въ этой приближенности видѣть закономерность, присущую математикѣ; они даютъ неисчерпаемый источникъ темъ для всякихъ вычислительныхъ работъ, избавляя учителя отъ необходимости вы-

послужить соинпльтельнымъ съ житеиской точки зрѣнія пирамиды съ заданными ребрами и двугранными углами при основаніи. какъ матеріалъ для вычислительныхъ упражненій. Геодезическія упражненія оказываютъ существенную услугу послѣдующему курсу космографіи, требующему большого напряженія способности видѣть въ пространствахъ.

Наконецъ, эти упражненія развиваютъ инициативу, чувство дисциплины, а по способу ихъ проведенія полезны для здоровья. И хотѣлъ-бы, чтобы этимъ упражненіямъ было отведено должное мѣсто въ школахъ.

Пренія по докладамъ Е. С. Томашевича, Д. М. Левитуса,
Ө. А. Эрна и К. Ө. Лебединцева.

П. А. Долгушинъ (Кіевъ). „Вмѣсто равенства трехгранныхъ угловъ лучше разсматривать равенство сферическихъ тр-ковъ, или выбрасывать эту статью, какъ предлагаютъ программы Кіевскаго и Варшавскаго математическихъ обществъ. О полученіи плоскости трепіемъ говоритъ еще Гельмгольцъ. Приведенное Е. С. Томашевичемъ доказательство о равенствѣ вертикальныхъ угловъ находимъ у Гадамара. Лучше говорить о перпендикулярѣ къ прямой и свойствахъ его раньше, чѣмъ о равенствѣ тр-ковъ. Тогда первый случай параллельности прямыхъ—перпендикуляры къ одной прямой. Теорему о пересѣченіи двухъ окружностей можно доказать въ началѣ курса. Теорема о параллельности прямыхъ при равенствѣ внутреннихъ на крестъ лежащихъ угловъ проще доказывается съ помощью теоремы о внѣшнемъ углѣ“.

П. С. Томашевичъ (Москва). „П. А. Долгушинъ указываетъ на то, что данный мною способъ доказательства равенства вертикальныхъ угловъ имѣется у Гадамара. Но я осуществляю это иначе, не прибѣгая къ совмѣщенію фигуръ другою стороною плоскости. Я, вообще, не желаю пользоваться другою стороною плоскости, считая плоскость принадлежностью твердаго неизмѣняемаго тѣла. Что касается расположенія матеріала въ курсѣ, то я настаиваю на томъ именно, который предлагаю я. Мнѣ кажется только, что изученіе построенныхъ фигуръ должно стоять на первомъ планѣ. Между тѣмъ, при доказательствѣ построения параллелей на основаніи теоремы о внѣшнемъ углѣ требуется знаніе теоремъ о равенствѣ треугольниковъ. Я же въ равенствѣ

треугольниковъ не нуждаются. Въ заключение скажу, что помимо учебнаго матеріала и его расположенія есть еще личность учителя, что въ ней, можетъ-быть,—вся суть".

П. П. Поповъ (Москва) проситъ *Д. М. Левитуса* объяснить, для чего необходимы точные инструменты при исполненіи учениками практическихъ геодезическихъ работъ.

Д. М. Левитусъ (Спб.) стоитъ за точные геодезическіе инструменты, такъ какъ они снабжены приспособленіями для установки горизонтальной плоскости, и вообще обогащаютъ воображеніе учащихся пространственными представленіями.

К. И. Зрне (Спб.). „Въ заслушанномъ докладѣ *Д. М. Левитуса* указывается, что для ознакомленія учениковъ съ геодезическими упражненіями, при прохожденіи курса тригонометріи, необходимо употреблять точные инструменты, какъ, напримѣръ, теодолитъ и т. п. Принимая во вниманіе трудность установки точныхъ инструментовъ геодезическихъ не только для взрослыхъ, (какъ, напр., студентовъ высшихъ специальныхъ учебныхъ заведеній), но даже для инженеровъ, я думаю, что вполне достаточно приучать учениковъ пользоваться астролэбией упрощеннаго типа, которая имъ наглядно покажетъ возможность примѣнять свои знанія. Инструменты же точные, какъ, напр., теодолитъ, слишкомъ дороги и, къ тому же, требуютъ тщательнаго за ними ухода. Такъ какъ, для достиженія намѣченной докладчикомъ цѣли, ихъ надо имѣть для каждаго учебнаго заведенія въ нѣсколькихъ экземплярахъ, то предложеніе докладчика не соотвѣтствуетъ матеріальнымъ средствамъ, имѣющимся въ распоряженіи среднихъ учебныхъ заведеній“.

Д. М. Левитусъ (Спб) находитъ, что вообще къ развитію пространственныхъ представленій учащихся надо особенно стремиться въ средней школѣ и что, поэтому, употребленіе точныхъ приборовъ для геодезическихъ упряженій крайне желательно. Тѣмъ болѣе, что зачастую учащіеся средней школы, какъ въ томъ убѣждаетъ опытъ докладчика, справляются съ точными инструментами не хуже иныхъ студентовъ.

А. П. Шапошниковъ (Москва) отмѣчаетъ отличныя качества доклада *Э. А. Эрн*. *Г. Эрнъ* требуетъ, чтобы мода играла какъ можно меньшую роль и чтобы возможно большую роль отвести здоровой критикѣ. *А. Н. Шапошниковъ* вполне присоединяется къ пожеланіямъ докладчика.

П. А. Извольскій (Москва). „Въ докладѣ *К. Э. Лебединцева* было упомянуто о неточностяхъ и нестрогостяхъ въ курсахъ математики. Напр.: „Допускаютъ неточныя, отчасти даже невѣрные объясненія, лишь бы они были понятны учащимся“. Здѣсь сом-

нѣнія двоякаго рода: 1) рекомендуемый докладчикомъ конкретно-индуктивный методъ также можно назвать, пожалуй, неточнымъ (примѣръ, $2^{2^n}-1$); 2) разъ объясненія даны, и вопросъ сдѣлался учащимся ясенъ, то объ этихъ объясненіяхъ нельзя говорить, что они «не точны, отчасти невѣрны», или что они «безусловно точны». Они цѣлесообразны, и ничего иного о нихъ сказать нельзя. Терминъ «неточныя» объясненія требуетъ поясненій».

К. О. Лебединцевъ (Москва). «Мы расходимся съ Н. А. Извольскимъ по существенному вопросу. Въ своемъ докладѣ я высказывался противъ употребленія за вѣдомо неточныхъ и невѣрныхъ объясненій. Въ качествѣ примѣра могу сослаться на упомянутую мною «Дидактику математики» Al. Höfler'a. При изложеніи учения о десятичныхъ дробяхъ, Гёфлеръ сознательно допускаетъ логическій дефектъ, указывая, что одиннадцатилѣтнія дѣти не настолько проницательны, чтобы его подмѣтить. Вотъ противъ такой постановки дѣла я и возставаъ въ своемъ докладѣ, считая такой пріемъ совершенно не педагогичнымъ. Далѣе Н. А. Извольскій указалъ, что онъ считаетъ недопустимымъ только одинъ видъ неточности,—это отсутствіе постоянства въ терминологіи. Я сказалъ бы наоборотъ, что это требованіе можетъ быть и не соблюдаемо, да фактически и не соблюдается. Мы употребляемъ слово «квадратъ» для обозначенія какъ геометрическихъ фигуръ, такъ и второй степени числа. Важно только, чтобы мы каждый разъ отдавали себѣ отчетъ въ смыслѣ употребляемаго термина».

XV. Вопросъ объ измѣреніяхъ и мѣрахъ въ системѣ ариметики.

Докладъ Л. А. Сельскаго (Варшава).

Докладъ этотъ напечатанъ въ вышедшемъ отдѣльнымъ изданіемъ сборникъ: «Л. Сельскій. Пѣкоторыя графики, влияющія къ изложенію начальной ариметики... и пр.» Варшава. Типографія Варшавскаго учебнаго округа. 1913 г. Ц. 30 к., а потому здѣсь не приводится. Заключительныя-же предложенія докладчика состояли и въ слѣдующемъ:

«А) Необходимо установить въ системѣ учебной ариметики опредѣленную и научную точку зрѣнія на сущность конкретныхъ измѣреній и мѣръ.

Б) Необходимо отграничить въ курсѣ арифметики представленіе о мѣрахъ и измѣреніяхъ отъ пріемовъ лавочнаго и другихъ видовъ счета.

В) Необходимо преобразовать нынѣ существующую въ главѣ объ измѣреніяхъ и мѣрахъ терминологию, введя понятіе о составныхъ единицахъ или высшихъ и низшихъ разрядахъ мѣрныхъ чиселъ, вмѣсто существующихъ нынѣ «мѣръ высшего» и «мѣръ низшаго наименованія»; съ другой стороны, понятія раздробленія и превращенія необходимо распространить съ разрядовъ мѣрныхъ чиселъ также и на разряды чиселъ отвлеченныхъ.

Г) Необходимо высказать сужденіе объ образовательномъ значеніи вопроса о сущности конкретных измѣреній и мѣръ, какъ основного пріема къ точному понятію количественно представляемыхъ свойствъ вещей.

4-я и 5-я секції.

Преподаваніє математики въ техническихъ
и коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ.

ЗАСѢДАНІЕ

29 декабря 1911 года.

Предсѣдатель: М. Л. Франкъ (Сиб.).

Секретарь: Е. И. Полушкинъ (Сиб.).

Курсъ анализа въ среднихъ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ.

Докладъ М. Л. Франка (Сиб.)

«Въ виду того, что въ секретаріатъ не поступило ни одного заявленія о докладахъ въ технической секціи, кромѣ моего, но съ другой стороны весьма много членовъ съѣзда выражали желаніе подѣлиться мыслями о преподаваніи математики въ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ, я полагаю, что целесообразнѣе всего и мнѣ сократить по возможности свой доклад и, высказавъ основныя положенія его, предложить собравшимся здѣсь обмѣняться мнѣніями по вопросу о постановкѣ преподаванія математики для техникувъ.

Цѣль преподаванія математики въ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ нѣсколько иная, чѣмъ въ общеобразовательной школѣ. Само собою разумѣется, что развивающее, общеобразовательное значеніе математики не должно быть отодвигаемо въ техническихъ училищахъ на задній планъ. Эта сторона обученія у насъ общая со всякой средней школой и, очевидно, какъ и вездѣ, требуетъ серьезной реформы. Мы должны, однако же, подходить къ преподаванію еще съ другой стороны, мы не можемъ и не должны забывать значенія математики, какъ могущественнаго орудія въ рукахъ техника.

Объединеніе въ программѣ и методахъ этихъ двухъ одинаково важныхъ для насъ сторонъ преподаванія математики

является чрезвычайно трудной проблемой, стоящей передъ нами и требующей своего разрѣшенія.

Что мы видимъ сейчасъ? Въ настоящее время въ методикѣ преподаванія технической математики замѣчается два, рѣзко противоположныхъ направленія. Одно направленіе, въ основѣ своей, имѣетъ положеніе, что математика, какъ наука, едина, что не можетъ быть особенной математики для техниковъ, а потому курсъ математики въ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ не долженъ ничѣмъ отличаться отъ курса общеобразовательной школы. Этому направленію отвѣчаетъ большинство современныхъ программъ. Правда, нѣкоторые отдѣлы математики считаются для техниковъ излишними и иной разъ выпускаются, но на ихъ мѣсто не приходитъ ничего особеннаго. Въ результатѣ, даже хорошій педагогъ, если онъ и сумѣетъ привить интересъ къ самой математикѣ, при подобной постановкѣ своего преподаванія, не можетъ установить вѣрной связи своего предмета съ остальными техническими предметами и въ концѣ концовъ математика окажется совершенно изолированной.

Реакціей противъ такого теоретическаго направленія преподаванія явилось рѣзко противоположное практическое направленіе, исходящее изъ практическихъ странъ - Англіи и Америки. Въ основѣ этого направленія лежитъ положеніе, что технику надо привить рядъ «умѣній» пользоваться готовыми математическими формулами и схемами, совершенно не вдаваясь въ сущность математическаго предмета. И дѣйствительно, защитники практической системы выдвигаютъ нѣмалый рядъ солидныхъ доводовъ. Не касаясь подробно этихъ доводовъ, укажу только на самый яркій и убѣдительный. Имъ для кого не секретъ, что значительная часть инженеровъ съ высшимъ образованіемъ, практически работающихъ въ техническихъ предіриятіяхъ, совершенно забываютъ весь курсъ высшей математики, даже и значительную часть элементарной. Это не мѣшаетъ имъ быть прекрасными инженерами и умѣло пользоваться всѣми справочниками. Очевидно, какъ будто бы, математика технику очень мало нужна.

Этотъ наиболѣе яркій доводъ, однако же, по моему мнѣ-

нію, можетъ служить свидѣтельствомъ только того, что методъ преподаванія математики въ высшихъ специальныхъ учебныхъ заведеніяхъ почти совсѣмъ не приспособленъ къ специальнымъ требованіямъ инженеровъ: инженеръ забываетъ ненужное ему и съ большими успіями въ самой практической жизни принужденъ учиться нужному. При этомъ онъ, конечно, страдаетъ отъ недостатка математическаго образованія, но ясно сознаетъ, что ему мало помогла бы академически строгая математика.

Съ другой стороны, изученіе одной только «практической математики», которое сводится къ умѣнью пользоваться готовыми формулами и таблицами, конечно, не можетъ быть признано удовлетворительнымъ. Помимо того, что такого рода изученіе, конечно, не заключаетъ въ себѣ развивающихъ элементовъ, оно отрѣзываетъ совершенно возможность критическаго отношенія къ математическому матеріалу, которымъ приходится пользоваться, и въ результатѣ можетъ привести къ крупнѣйшимъ ошибкамъ. Случайная замѣна одного символа другимъ, одного буквеннаго обозначенія какимъ-либо новымъ, является непреодолимымъ препятствіемъ для ума, привыкшаго механически производить дѣйствія. О самостоятельной творческой работѣ воспитаннаго на «практической математикѣ» ума не можетъ быть и рѣчи.

Компромиссъ между двумя этими крайними направленіями оказывается мало осуществимымъ. Если уменьшить объемъ изученія теорій, оставивъ время на изученіе приѣмовъ практической математики, то количество теоретическихъ познаній окажется недостаточнымъ для выясненія болѣе или менѣе сложныхъ проблемъ техники, а самыя познанія будутъ недостаточно углублены. Получается почти безцѣльная затрата времени на изученіе теорій, что обыкновенно и утверждаютъ сторонники практическихъ методовъ.

Выходъ изъ положенія можетъ быть найденъ, по моему мнѣнію, лишь при полномъ пересмотрѣ какъ матеріала, такъ и методовъ преподаванія, которые должны быть сообразованы одновременно съ цѣлью преподаванія и требованіями раціональной педагогики.

Цѣлью преподаванія математики является достиженіе

уміння сознательно рѣшать задачѣмъ технического характера. Для техника нѣтъ, конечно, необходимости производить точный анализъ стоящей передъ нимъ проблемы. Ему не нужно даже ея точнаго рѣшенія. Онъ нуждается только въ ясномъ пониманіи смысла задачи и въ приближенномъ ея рѣшеніи. Для рѣшенія онъ долженъ уміти найти кратчайшій путь, дающій при томъ достаточную точность результата.

При изученіи высшей математики необходимо прежде всего достигнуть яснаго пониманія методовъ высшаго анализа, что можетъ быть осуществлено преимущественно на задачахъ конкретно-техническаго характера. Ограничивъ программу преподаванія анализа выводомъ только простѣйшихъ формулъ и теоремъ, необходимо развити у учащагося функціональное мнѣніе и умѣніе пользоваться наглядными графическими методами интерпретаціи аналитическихъ задачъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ необходимо изученію въ сравнительно большемъ объемѣ методовъ приближеннаго и графическаго исчисленія въ приложеніи его къ задачамъ сравнительно сложнымъ. Разъ смыслъ методовъ высшаго анализа ясенъ, то пользованіе приближенными методами, при условіи критическаго къ нимъ отношенія, одновременно принесетъ пользу какъ для общаго развитія учащагося, такъ и для вооруженія его практическими средствами разрѣшенія сложныхъ задачъ. Пользованіе логарифмической линейкой и логарифмической бумагой, миллиметровой калькой, планиметрами и другими средствами приближеннаго исчисленія даетъ возможность рѣшать сложные задачи весьма простыми средствами.

Особенно желательнымъ является, чтобы всѣ отдѣлы математики, проходимые въ училищѣ, были по возможности слиты воедино, чтобы не было даже спеціальнаго отдѣльнаго курса высшей математики. Графическое изображеніе функцій можетъ быть введено въ самомъ началѣ изученія алгебры и если тамъ же обращать вниманіе на понятіе возрастанія и убыванія функцій, максимум и минимумъ, то основныя положенія дифференціального исчисленія явятся естественнымъ слѣдствіемъ изъ всего уже извѣстнаго матеріала. Аналогично въ геометріи

при опредѣленіи площадей, поверхностей и объемовъ можно подойти сколь угодно близко къ понятію опредѣленнаго интеграла. При такомъ способѣ преподаванія высшая математика не окажется чѣмъ-то особенно страшнымъ и не потребуетъ для своего прохожденія большого числа часовъ и большого труда.

Естественно, что разработать въ деталяхъ проектъ такой реформы преподаванія математики въ техническихъ училищахъ чрезвычайно трудно и было бы крайне желательно, если бы работа эта была произведена коллективно цѣлой группой опытныхъ уже преподавателей.

Пренія по докладу М. Л. Франка.

А. И. Роговскій (Спб.). «Высшая математика въ средней школѣ не должна быть проходима, не смотря на ея развивающее значеніе вслѣдствіе недостатка времени, большая часть котораго поневолѣ должна быть удѣляема на изученіе специальныхъ предметовъ. Я полагаю, что для средняго техника прохожденіе высшей математики въ школѣ не является необходимымъ съ практической точки зрѣнія. Если многимъ инженерамъ не приходится примѣнять на практикѣ высшей математики, то и подавно ея не будетъ примѣнять средній техникъ».

Нынешній курсъ математики въ средней технической школѣ, представляющій собой урѣзанный курсъ общеобразовательныхъ учебныхъ заведеній, неудовлетворителенъ уже потому, что органически не связанъ съ специальными предметами. Мнѣ кажется, что курсъ необходимой математики выработался бы практически скорѣе всего, если бы математику преподавали въ техническихъ училищахъ инженеры».

В. Я. Геббель (Москва). «Для плановѣрности бесѣды необходимо прежде всего условиться, о какихъ среднихъ техническихъ училищахъ идетъ рѣчь. Безъ этого обсужденіе будетъ неопредѣленнымъ».

Н. А. Томилинь (Спб.) присоединяется къ сдѣланному В. Я. Геббелемъ заявленію.

А. В. Панкинъ (Спб.) предлагаетъ не детализовать слишкомъ и разбить всѣ техническія училища на двѣ группы: 1) готовяща молтеровъ, или низшихъ техниковъ и 2) готовящая среднихъ техниковъ, могущихъ въ иныхъ случаяхъ замѣщать и инженера.

Д. М. Левитусъ (Спб.), присоединяясь къ предложенію *А. В. Панкина*, предлагаетъ говорить сейчасъ только о среднихъ техническихъ училищахъ.

А. В. Панкинъ (Спб.) „Основною техническаго образованія служатъ физико-математическія науки, которымъ должно быть удѣляемо достаточное мѣсто. Цѣлью изученія математики является: 1) логическое развитіе, 2) развитіе индукцій (количественныхъ и пространственныхъ), 3) фактическое заповинданіе, 4) механическое воспроизведеніе (исчисленіе и черченіе).

Въ среднихъ общеобразовательныхъ учебныхъ заведеніяхъ главными являются двѣ первыя цѣли, въ техническихъ же — центр тяжести переносится на послѣднія двѣ. Однако же, и техническое образованіе не можетъ отличаться отъ первыхъ двухъ цѣлей.

Если общеобразовательная школа можетъ создать два центра при преподаваніи математики для цѣлей индуктивнаго развитія и логическаго, то техническая школа, преслѣдуя тѣ же двѣ цѣли, едва ли можетъ выполнить то же. Придется довольствоваться курсами смѣшаннаго характера вродѣ втораго центра *Porel'*я. О курсѣ на строго логическихъ основаніяхъ нельзя думать потому, что въ старшихъ классахъ все время поглощается спеціальными курсами и, кромѣ того, фактическія свѣдѣнія по разнымъ отдѣламъ математики нужны уже гораздо раньше“.

И. И. Жаиколъ (Спб.) возражаетъ *А. В. Панкину*. Въ 7-классныхъ училищахъ нѣтъ никакихъ препятствій для установленія двухъ концентровъ, а въ 4-хъ классныхъ приходится имѣть дѣло съ окончившими городскую школу и слѣдовательно прошедшихъ первый концентръ. Разбиваніе математики на отдѣльные циклы можетъ представить затрудненіе вслѣдствіе необходимости переплетать различные отдѣлы математики, напримѣръ, алгебру и геометрію, высшую математику и алгебру и т. д.

И. Н. Кокущинъ (Саратовъ). „Преподаваніе анализа введено уже теперь въ курсъ реальныхъ училищъ. Тѣмъ болѣе необходимо было бы ввести его въ техническія училища, гдѣ цѣлый рядъ важнѣйшихъ вопросовъ механики и электротехники требуютъ знанія высшаго анализа, безъ котораго преподаватель принужденъ прибѣгать къ хитроумнымъ методамъ или заставлять принимать многое на вѣру безъ вывода. Мой опытъ факультативнаго преподаванія началъ анализа, какъ введенія въ механику показалъ, что учащіеся легко воспринимаютъ основные методы, а потому я считаю желательнымъ введеніе обязательнаго курса высшей математики въ среднія техническія училища“.

В. Я. Гебель (Москва) говоритъ о ненормальномъ учебномъ планѣ въ техническихъ училищахъ. Аналитическая геометрія отне-

сена ко второму классу, а въ первомъ проходитъ механика, причѣмъ анализъ совершенно отсутствуетъ.

Онъ высказывается за необходимость реформы учебныхъ книжекъ и за введеніе элементовъ высшей математики и предлагаетъ собранію остановиться на обсужденіи двухъ вопросовъ:

- 1) Необходимо ли введеніе курса анализа.
- 2) О постановкѣ преподаванія механики въ среднихъ технич. училищахъ.

А. Н. Рюковскій (Спб.) высказывается противъ введенія курса высшей математики. Ему удавалось излагать механику безъ высшей математики и учебникъ его по деталямъ машинъ, изложенный безъ высшей математики, рекомендованъ Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія въ качествѣ пособія.

А. М. Левитцъ (Сиб.) указываетъ, что прохожденіе курса анализа строго научнаго врядъ ли осуществимо. Зато легко осуществимо прохожденіе курса пропедевтическаго, а польза, приносимая такого рода курсомъ не столько несомнѣнна, что введеніе его онъ считаетъ прямо необходимымъ. Личный опытъ убѣдилъ его въ полной возможности пройти такой курсъ съ весьма удовлетворительнымъ результатомъ.

М. Л. Франкъ (Сиб.) утверждаетъ, что при изложеніи основъ высшаго анализа нѣтъ необходимости удѣлять много времени теоріи предѣловъ, понятіе о которой должно даваться еще въ алгебрѣ и геометріи. Точно также можно значительно сократить обычный курсъ аналитической геометріи, обративъ зато больше вниманія на графики различныхъ функцій.

Н. А. Томилинь (Сиб.). „Предложенная М. Л. Франкомъ въ его докладѣ полная переработка программъ и методовъ не можетъ быть осуществлена въ ближайшемъ будущемъ, а между тѣмъ, необходимо уже сейчасъ найти нѣкоторый выходъ изъ положенія. Необходимо видоизмѣнить преподаваніе аналитической геометріи, чтобы она была оторванной отъ другихъ наукъ и направить изученіе на изслѣдованіе различныхъ важнѣйшихъ законовъ физики и механики, что дастъ и общее развитіе, и вызоветъ интересъ со стороны учащихся. Точно также необходимо было бы видоизмѣнить курсъ механики съ введеніемъ элементовъ анализа.

Г. С. Виницкій (Ростовъ на Д.) указываетъ на трудность прохожденія механики при современномъ учебномъ планѣ и высказываетъ предположеніе о раздѣленіи курса механики на два центра. Первый изъ нихъ могъ бы быть пройденъ до окончанія курса математики, второй же—послѣ прохожденія всей математики и началъ анализа.

В. Я. Гебель (Москва) подчеркиваетъ трудность реформъ учеб-

ного плана. Съ одной стороны ясна необходимость прохожденія анализа и аналитической геометріи раньше механики, съ другой же—очевидно, врядъ ли удастся пройти эти отдѣлы математики въ 1-омъ классѣ и отложить механику на второй.

И. В. Панкинъ (Спб.) подчеркиваетъ необходимость найти возможность преподавать анализъ и притомъ раньше механики. По его мнѣнію выходъ этотъ только въ созданіи двухъ концентровъ по механикѣ.

Д. М. Левитусъ (Спб.) резюмируетъ пренія по вопросу о курсѣ анализа. Большинство, очевидно, высказывается за необходимость введенія такого курса и реформированія преподаванія механики. Онъ предлагаетъ еще обмѣняться мнѣніями по вопросу о приближенныхъ вычисленіяхъ.

В. М. Филипповъ (Спб.) указываетъ, что лица, окончившія среднія учебныя заведенія, совершенно не умѣютъ считать правильно. Обучение правильно вычислять съ неточными данными должно начинаться возможно раньше, чтобы приобрести достаточный навыкъ.

Л. И. Роговскій (Спб.) считаетъ полезнымъ переучивать самыя элементы ариѳметики. Напр., необходимо приучать множить сначала, а не съ конца и т. д.

Д. М. Левитусъ (Спб.) также подчеркиваетъ полное неумѣніе считать у лицъ, прошедшихъ среднюю школу. Необходимо въ техническихъ училищахъ ввести побольше упражненій на вычисленія; было бы полезно отвести отдѣльные часы на изученіе приѣмовъ и техники вычисленій. Необходимо, чтобы учащіеся имѣли ясное представленіе объ относительной погрѣшности при вычисленіяхъ.

И. А. Томилинь (Спб.) указываетъ на связь между анализомъ и приближенными вычисленіями и высказывается за необходимость возможно раньше, съ младшихъ классовъ, начинать приучать къ приближеннымъ вычисленіямъ.

А. В. Панкинъ (Спб.) обращаетъ вниманіе на недостатокъ руководства по приближенному вычисленію, что объясняется недостаткомъ интереса къ этому чрезвычайно важному отдѣлу математики.

М. Л. Франкъ (Спб.), подчеркивая значеніе прохожденія приближенного вычисленія какъ для общаго развитія, такъ и съ практической точки зрѣнія, предлагаетъ внести на разсмотрѣніе Организационнаго Комитета Съѣзда желательность резолюціи о необходимости введенія курса приближенного вычисленія для техническихъ училищъ.

Д. М. Левитусъ (Спб.) предлагаетъ принять и довести до свѣдѣнія Организационнаго комитета Съѣзда слѣдующую резолюцію:

«Обмѣнъ мѣстѣмъ въ секціи Техническихъ учебныхъ заведеній выяснилъ, что для среднихъ техническихъ училищъ необходимо переработать существующія программы и учебные планы по математикѣ и механикѣ въ такомъ направленіи, чтобы графическимъ методамъ было отведено должное мѣсто, чтобы явилась возможность въ той или иной формѣ ввести преподаваніе началъ анализа до прохожденія систематическаго курса механики, и чтобы включено было обученіе приближеннымъ и сокращеннымъ методамъ вычисленій».

Предложенная резолюція принимается собраніемъ.

ЗАСѢДАНІЕ

29 декабря 1911 года.

Предсѣдатель: проф. П. А. Некрасовъ (Спб.).

Товарищъ предсѣдателя: А. Θ. Гатлихъ (Москва).

Секретарь: В. П. Литвинскій (Екатеринославъ).

1. О необходимыхъ отдѣлахъ математики для экономическихъ наукъ.

Докладъ проф. П. А. Некрасова (Спб.)

Сущность доклада заключается въ слѣдующемъ: Экономическое образованіе въ Россіи должно быть обосновано на научныхъ достовѣрностяхъ, открываемыхъ съ помощью математики. Необходимы соответствующіе отдѣлы математики въ среднемъ образованіи. Но математика въ ея элементарныхъ высшихъ основаніяхъ такъ разрослась, что въ планѣ преподаванія средней школы имъ не находится мѣста. Отсюда нѣтъ иного выхода, кромѣ соответствующаго подраздѣленія на типы.

Реальные гимназій (т. е. реальныя, техническія и коммерческія училища) можно подраздѣлить на слѣдующія двѣ группы: А) училища, подготовляющія къ механико-техническимъ спеціальностямъ, В) училища, подготовляющія къ экономическимъ (торгово-промышленнымъ и сельско-хозяйственнымъ спеціальностямъ) и къ химико-техническимъ наукамъ.

Эти двѣ категоріи училищъ нуждаются въ различныхъ группахъ элементовъ высшей математики. Тогда какъ училища (А) нуждаются въ помощи аналитической геометріи и математическаго анализа, другая группа училищъ (В) въ этихъ предметахъ вовсе не нуждаются, но очень нуждаются въ помощи другой группы математическихъ высшихъ элементовъ, примыкающихъ къ теоріи сочетаній, теоріи чиселъ и къ теоріи безусловныхъ и условныхъ достовѣрностей, т. е. вѣроятностей.

Примирить это противорѣчіе можно лишь различіемъ учебнаго плана математики въ старшихъ классахъ училищъ типа А и типа В, при общности учебнаго плана въ первыхъ четырехъ или пяти классахъ и при равноправіи этихъ типовъ въ отношеніи высшаго образованія.

Чтобы экономическое среднее и высшее образованіе въ Россіи поставить на строго научную почву, необходимо включить въ среднюю школу, въ ея типъ В, преподаваніе слѣдующихъ отдѣловъ математики:

I) Математическую теорію вѣроятностей, съ законами большихъ чиселъ и съ теоріей взаимоотношеній (въ смыслѣ Гальтона, Пирсона, Карла Ранке и пр., см. книгу П. А. Некрасова. Теорія вѣроятностей ч. III). II) Математическую статистику въ духѣ П. Laurent и П. А. Некрасова.

Лоранъ излагаетъ математическую «статистику, какъ экспериментальную часть рациональной политической экономіи.

III) Графическое исчисленіе, наглядно представляющее при помощи сравнительныхъ таблицъ, чертежей и картограмъ арифметическія функціи и числовыя закономерности различныхъ текущихъ экономическихъ явленій. Изъ этихъ матеріаловъ берется лишь элементарное, вполне понятное возрасту.

Аналитическая же геометрія и высшій математическій анализъ (дифференціальное и интегральное исчисленіе) могли бы быть въ планѣ училищъ (В) исключены, если не хватитъ времени, кромѣ понятія о координатахъ и кромѣ ученія о максимумъ-минимумъ простѣйшихъ функцій, встречающихся въ задачахъ по статистикѣ, кредиту и экономіи.

Сокращенію должны подлежать и многія пустопорожнія задачи арифметики, алгебры и геометріи. Напротивъ, задачи, сближенныя съ запросами жизни, должны быть привѣтствованы, если они согласны съ наукою.

Экономическая независимость Россіи тѣсно связана съ научно-правильной постановкой реальной средней школы, не только типа А, но типа В. Предлагаемая реформа основного плана поэтому принадлежитъ къ числу неотложныхъ.

Пренія по докладу проф. П. А. Некрасова.

З. А. Архимовичъ (Кіевъ). „Постановка преподаванія математики въ коммерческихъ училищахъ въ данное время не ниже постановки отдѣловъ математики въ реальныхъ училищахъ и потому нѣтъ необходимости отказываться отъ введенія началъ аналитической геометріи и началъ анализа, конечно, лишь останавливаясь на существенно необходимыхъ отдѣлахъ этихъ дисциплинъ. Въ общемъ, присоединяясь къ положеніямъ доклада уважаемаго профессора, при семъ считаю существенно важнымъ дать ученикамъ необходимую математическую подготовку къ усвоенію началъ теоріи вѣроятностей, столь широко примѣняемой въ экономическихъ наукахъ. Все это наводитъ на мысль о необходимости особой разработки программъ по математикѣ, чтобы, вводя новое, исключить излишнее и тѣмъ облегчить трудъ учащихся“.

В. Г. Морачевскій (Кривой Рогъ, Херс. губ.). „Считая предложенія докладчика отвѣчающими насущной потребности обоснованія экономическихъ наукъ, высказываю пожеланіе о перенесеніи нѣкоторыхъ отдѣловъ изъ коммерческой ариметики въ общую и о введеніи на освобождающееся отъ этого время отдѣловъ теоріи вѣроятностей и нѣкоторыхъ ея примѣненій“.

II. О постановкѣ преподаванія математики въ коммерческихъ училищахъ.

Тезисы доклада *И. М. Вакуменко (Мелитополь, Тавр. губ.).*

1) Въ виду наличности въ программѣ коммерческихъ училищъ коммерческой ариметики является возможнымъ изъ курса общей ариметики выбросить задачи на спеціальныя правила, оставивъ только основную задачу на проценты, которая должна найти мѣсто еще въ курсѣ десятичныхъ дробей, а также пропорціональное дѣленіе.

2) Задачи на пропорціональныя величины должны быть сохранены.

3) Введеніе въ курсъ коммерческихъ училищъ съ преподаваніемъ коммерческихъ наукъ исключительно въ старшихъ классахъ, какъ преимущественно общеобразовательныхъ, теоріи вѣроятностей съ приложеніями ея къ обоснованію экономиче-

скихъ наукъ, въ виду недостаточности времени—не желательно.

4) Въ общемъ курсѣ ариметики слѣдуетъ сохранить общепринятый порядокъ прохожденія дробей.

5) Отдѣлы о дѣлимости чиселъ и теорія періодическихъ дробей должны быть отнесены въ курсъ ариметики VII-го класса.

6) Курсъ алгебры слѣдуетъ сохранить въ полномъ объемѣ, причемъ прохожденіе алгебры должно начинаться не съ рѣшенія уравненій, а съ изученія алгебраическихъ выраженій и ихъ преобразованій.

7) Курсъ геометріи долженъ быть пересмотренъ въ смыслѣ опущенія доказательствъ тѣхъ положеній, которые очевидны, и вообще въ смыслѣ предложеній Д. В. Ройтмана.

8) Въ геометрическомъ черченіи наряду съ рѣшеніемъ задачъ съ анализомъ слѣдуетъ дать мѣсто и рѣшенію задачъ интуитивнымъ путемъ.

9) Каждая математическая дисциплина въ средней школѣ должна являться не какъ наука сама по себѣ, а какъ учебный предметъ, имѣющій въ виду дать учащимся надежные и точные методы математическаго изслѣдованія.

10) Методы нагляднаго обученія, а въ томъ числѣ и лабораторный методъ и введеніе въ изученіе пространственныхъ образовъ движенія, должны найти себѣ мѣсто при прохожденіи математики въ средней школѣ, быть можетъ въ болѣе мѣрѣ, чѣмъ это имѣетъ мѣсто до сихъ поръ.

11) Индивидуализація преподаванія въ формѣ выдѣленія двухъ отдѣловъ въ старшемъ классѣ—отдѣловъ механико-техническаго и коммерческаго—недостаточна: даже выдѣленіе трехъ отдѣловъ, классическо-гуманитарнаго, реальнаго и коммерческаго дало бы только возможность проявиться индивидуальности учащихся при выборѣ высшей школы.

Пренія по докладу И. А. Бакуменко.

Проф. И. А. Некрасовъ (Спб.) указываетъ на разность точекъ зрѣнія докладчика. Увлеченіе аналитическимъ изслѣдованіемъ

исключаетъ способность разбираться въ вопросахъ, нужныхъ торговому дѣлу. Необходимо выработать страховое ариѳметическое и комбинаторное мышленіе, столь необходимое для коммерческихъ людей. Знакомство профессора съ таблицами среднихъ школъ всѣхъ странъ Европы убѣждаетъ его въ правильности проводимаго имъ взгляда. Даже и Франція пришла къ разочарованію въ своей прежней бифуркаціи. Французская бифуркація специальныхъ классовъ (классъ словесный и классъ математическій) замѣнена, по декрету 1902 года, четырьмя специальными классами: 1) словесный съ древними языками, 2) словесный съ новыми иностранными языками, 3) математическій съ господствомъ анализа и 4) математическій съ господствомъ ариѳметики и теоріи описательной статистики. Интересы индивидуализаціи требуютъ того же самаго.

С. В. Новосильцевъ (Екатеринодаръ). „Введеніе теоріи вѣроятностей и теоріи соединеній, по моему мнѣнію, абсолютно необходимо. Будущему коммерсанту, понимая это слово въ широкомъ смыслѣ, необходимо быть знакомымъ съ такими дисциплинами, какъ теорія страхованія и теорія долгосрочныхъ финансовыхъ операций, а изложеніе этихъ отдѣловъ невозможно безъ элементарныхъ свѣдѣній изъ теоріи вѣроятностей и теоріи соединеній. Я на практикѣ проводилъ высказанную мысль. Въ Ростовскомъ коммерческомъ училищѣ, гдѣ я раньше преподавалъ, былъ отведенъ одинъ урокъ для, такъ называемой, политической ариѳметики, куда и входять вышеуказанные отдѣлы математики. Замѣчу, что ученики относились къ политической ариѳметикѣ, пожалуй, даже съ большимъ интересомъ, чѣмъ къ остальнымъ отдѣламъ математики и коммерческихъ наукъ“.

В. В. Мурашевъ (Нижній Новгородъ) напоминаетъ, что введеніе въ курсъ математики тѣхъ основъ, о которыхъ говорилъ П. А. Некрасовъ, уже было предусмотрено Министерствомъ Торговли и Промышленности при условіи учрежденіи восьмого класса, въ программѣ котораго эти главы носятъ названіе политической ариѳметики.

П. А. Гостининопольскій (Барнаулъ). „Коммерческія учебныя заведенія сильны своими специальными предметами, какъ техническія, художественныя и др.—своими. При всемъ желаніи нельзя урѣзать спеціальныя предметы до такой степени, чтобы сравнять коммерческія училища съ реальными. И преслѣдуя цѣли общаго образованія, мы рискуемъ не дать ни реального, ни коммерческаго образованія.“

А. Ѳ. Гатлихъ (Москва). „Коммерческія училища, по существу, не удовлетворяютъ своему назначенію. Въ послѣдніе годы открылось много коммерческихъ училищъ, благодаря извѣстнымъ

историческимъ условіямъ, и они обратились въ реальныя училища съ преподаваніемъ коммерческихъ наукъ. Но Россіи нужны коммерческія училища, которыя удовлетворяли бы своему назначенію. Посему необходимо обсудить вопросъ—какая программа математики желательна въ курсѣ правильно поставленныхъ коммерческихъ училищъ“.

А. И. Пьяшесвичъ (ст. Окуловка, Ник. ж. д.). „Коммерческія училища въ настоящее время въ большинствѣ случаевъ не носятъ характера профессиональныхъ училищъ, а имѣютъ общеобразовательный характеръ. Если взять даже тѣ нѣсколько училищъ, которыя имѣютъ профессиональный характеръ и посмотрѣть—посвящаютъ ли себя окончившіе такую школу коммерческой дѣятельности, то мы увидимъ, что большинство изъ нихъ идутъ въ высшія учебныя заведенія. Отсюда слѣдуетъ, что идущіе въ коммерческія училища вовсе не ставятъ себѣ цѣлью получить профессиональное образованіе.“

Во всякомъ случаѣ, о преобразованіи училищъ такого типа умѣстно говорить въ болѣе широкомъ собраніи.

Если говорить о коммерческихъ училищахъ, имѣющихъ общеобразовательный характеръ, то о постановкѣ преподаванія математики въ нихъ цѣлесообразнѣй говорить въ общей секціи“.

А. И. Филипповъ (Могилевъ-Под.). „Для того, чтобы коммерческимъ училищамъ придать спеціальныя характеръ, надо преобразовать преподаваніе ариѳметики въ младшихъ классахъ. Здѣсь центръ тяжести вопроса, а не введеніи спеціальныхъ предметовъ въ высшихъ классахъ. Поэтому надо ввести преподаваніе коммерческой ариѳметики, начиная съ младшихъ классовъ.“

Въ I-мъ классѣ можно ввести простѣйшіе товарныя вычисленія составленія счетовъ. Во 2-омъ классѣ—простѣйшія калькуляціи и въ III-мъ классѣ—процентныя вычисленія, преобразованіе пробъ, монетныя вычисленія“.

В. Г. Морачевскій (Кривой Рогъ) указываетъ на то, что нельзя игнорировать тѣхъ отдѣловъ математики, которые нужны будущему промышленнику и коммерсанту, причемъ эти отдѣлы должны соответствовать тѣмъ запросамъ, которые выставляетъ жизнь, требующая созданія образованныхъ работниковъ и людей, подготовленныхъ къ коммерческой дѣятельности. В. Г. Морачевскій предлагаетъ позаботиться о томъ, чтобы на слѣдующемъ Съѣздѣ Преподавателей Математики была образована секція по преподаванію математики въ коммерческихъ училищахъ.

Въ заключеніе Секція вынесла слѣдующія постановленія:

I. Желательно на слѣдующемъ Сѣздѣ Преподавателей Математики образовать секцію по преподаванію математики въ коммерческихъ училищахъ.

II. На слѣдующемъ Сѣздѣ пересмотрѣть программу математики коммерческихъ учебныхъ заведеній.

III. Желательно на Сѣздѣ рассмотреть вопросъ о возможности введенія въ курсъ коммерческихъ училищъ основанія теоріи вѣроятностей и ея приложеній.

Алфавитный списокъ лицъ, выступавшихъ на Съѣздѣ въ собраніяхъ Секцій.

- Александровъ, П. И.—300.
 Архимовичъ, З. А.—182, 337.
 Бакуменко, И. И.—337.
 Варлачъ, В. И.—272.
 Вломенфельдъ, М. Р.—177, 281.
 Вильценсъ, И. М.—172, 174.
 Виницкій, Г. С.—329.
 Волковскій, Д. И.—131.
 Володковичъ, Н. Н.—97, 136.
 Волокобыскій, М. Е.—130, 227, 272.
 Галанинъ, Д. Д.—190.
 Гатичъ, А. О.—164, 339.
 Гебель, В. И.—130, 327, 328, 329.
 Годиновъ, А. В.—128.
 Гостиполовскій, Н. А.—339.
 Гуковъ, С. И.—183.
 Давидовъ, Д. И.—174.
 Джеруновъ, К. И.—34.
 Долгушинъ, П. А.—95, 244, 317.
 Дубравинъ, В. И.—199.
 Жданковъ, П. И.—328.
 Эборомірежскій, П. А.—178.
 Зреле, К. И.—318.
 Извольскій, П. А.—73, 96, 163, 318.
 Ильиничъ, А. Н.—340.
 Казаровъ, А. Г.—178.
 Каширинъ, Л. И.—174.
 Киселевъ, А. И.—94.
 Кокушинъ, П. И.—328.
 Колонъ, С. Р.—283.
 Колубовская, П. А.—164.
 Комаровъ, П. А.—95.
 Крамаренко, Б. И.—272, 273.
 Кротушъ, В. А.—231.
 Кузнецовъ, Г. И.—165, 175.
 Куликовъ, А. Р.—37, 197.
 Кузнецовъ, В. М.—135, 197, 228.
 Лебедиконъ, К. О.—182, 207, 209,
 230, 319.
 Левитовъ, Л. М.—245, 314, 318, 328,
 329, 330.
 Мещенко, А. И.—200.
 Мухомовъ, П. И.—198, 283.
 Магалифъ, В. И.—171.
 Майделъ, В. Х.—53.
 Марковичъ, В. А.—172, 179, 183, 273,
 284.
 Морачевскій, В. Г.—337, 340.
 Мордухай-Волтовской, Д. Д.—282.
 Мронекъ, В. Р.—68, 132, 198, 229.
 Мурашевъ, В. В.—339.
 Неволинскій, С. А.—202.
 Некрасовъ, П. А.—176, 178, 335, 338.
 Новосильцевъ, С. В.—339.
 Остроумова, А. И.—25, 174, 175.
 Павловъ, Н. А.—228.
 Давидовъ, А. В.—327, 328, 330.
 Перля, О. И.—95.
 Писаревскій, В. В.—10, 128, 130.
 Писаревъ, А. Г.—198.
 Поповъ, Н. И.—266, 273.
 Поповъ, П. И.—318.
 Попруженко, М. Г.—134, 136, 178.
 Потодскій, П. И.—228.
 Рабиновичъ, П. О.—282.
 Роговскій, А. И.—337, 329, 330.
 Савьянъ, А. Д.—177.
 Сары, Я. Г.—228, 283.
 Сахаровскій, М. А.—174.
 Сельскій, Л. А.—135, 201, 319.
 Соболевъ, А. В.—199.
 Соколовскій, Е. И.—163, 173.
 Соколовъ, В. А.—124, 163.
 Соколовская, Е. З.—173.
 Тамашева, Н. А.—140, 161.
 Токаревъ, В. В.—174.
 Томишевскій, Е. С.—94, 304, 317.
 Томишинъ, Н. А.—327, 329, 330.
 Травинковъ, И. М.—296.
 Тяпкина, Л. Н.—61.
 Филипповъ, А. И.—340.
 Филипповъ, В. М.—330.
 Франкъ, Н. И.—323, 329, 330.
 Чебышевъ-Дмитриевъ, А. А.—173.
 Шапошниковъ, А. Н.—227, 318.
 Шарбе, С. В.—283.
 Шагуновскій, С. О.—200.
 Шохоръ-Троцкий, С. И.—189, 199,
 201, 285.
 Эрль, О. А.—251.

Перечень докладовъ,

вошедшихъ въ 1-й и 2-й томы «Трудовъ 1-го Всероссийскаго
Съѣзда преподавателей математики». *)

Психологическія основы обученія.		
1	Требованія, предъявляемыя психологіей къ мат-кѣ, какъ учебному предмету.	С. И. Шохоръ-Троцкий. I **). 54—81
2	Экспериментальныя проблемы въ педагогикѣ математики.	В. Р. Мронекъ. I. 81—95 99—101
3	Новыя изслѣдованія по физиологій центральной нервной системы и педагогика.	Н. Д. Ельпо. I. 96—101
4	О значеніи экспериментальной психологій для педагогики.	Проф. А. И. Исачевъ. I. 317—318
Цѣль и содержаніе курса школьной математики; историческіе и философскіе элементы въ курсѣ средней школы.		
1	Содержаніе курса школьной математики.	А. Г. Ничушкинъ. I. 156—161 180—190
2	Содержаніе курса школьной математики съ точки зрѣнія современныхъ запросовъ жизни и приемы для усиленнаго выполненія школою этихъ требованій.	Пр.-доц. В. В. Термантовъ. I. 161—190

*) Перечень этотъ составленъ примѣнительно къ § 4-му Положенія о Съѣздѣ (т. I-й, стр. XV).

**) Римскими цифрами обозначены томы, арабскими—страницы.

- | | | | |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 3 | О реальномъ направленіи преподаванія мат-ки въ связи съ жизненными и научными фактами. | <i>И. Н. Володкевичъ.</i> | II.
97—123
135—136 |
| 4 | Математическое и философское преподаваніе въ средней школѣ. | <i>Проф.
А. В. Васильевъ.</i> | I.
8—24 |
| 5 | Изн., формы и средства введенія историческихъ элементовъ въ курсъ мат-ки средней школы. | <i>Пр.-дон.
В. В. Бобынинъ.</i> | I.
129—149 |

Учебная литература; наглядныя пособія.

- | | | | |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 1 | Обзоръ литературы по арифметикѣ младшихъ и среднихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. | <i>В. Х. Майдель.</i> | II.
53—61 |
| 2 | Обзоръ четырехъ учебниковъ по ари-кѣ. | <i>Л. И. Тяпкина.</i> | II
61—67 |
| 3 | Обзоръ современной учебной литературы по алгебрѣ. | <i>В. В. Петров-скій.</i> | II.
10—34 |
| 4 | Обзоръ нѣкоторыхъ руководствъ по элементарной геометріи. | <i>А. Р. Кулинскій.</i> | II.
37—53 |
| 5 | Обзоръ литературы на русскомъ языкѣ по методикѣ ари-ки. | <i>В. Р. Мрочекъ.</i> | II.
68—72
130—134 |
| 6 | Примѣрный библиотечный каталогъ. | <i>К. Н. Деруновъ.</i> | II
34—37 |
| 7 | Наглядныя пособія. | <i>Д. Э. Теттеръ.</i> | I.
223—244 |

Методологія и методика; планы и программы курса математики средней школы; экзамены.

- | | | | |
|---|----------------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1 | Методъ обученія математикѣ въ старой и новой школѣ. | <i>К. Θ. Лебединцевъ.</i> | II.
207—208
318—319 |
| 2 | Объ измѣненіи метода обученія въ низшей и средней школѣ. | <i>Д. Д. Галикинъ.</i> | II.
190—201 |

3	О реформѣ преподаванія математики. Общія положенія и программы. Содержание курса мат-ки за первую половину лѣтъ обученія.	<i>Н. А. Тамм-шева.</i>	II. 140—165
4	О лабораторныхъ занятіяхъ по мат-кѣ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Кавказскаго учебн. округа.	<i>Н. Н. Поповъ.</i>	II. 266—273
5	Игры и занятія, способствующія развитію образнаго мышленія и представленія.	<i>А. Н. Смирновъ.</i>	I. 219—223 241—244
6	Спорные вопросы въ методикѣ арифметики.	<i>Ө. А. Эрнъ.</i>	II. 251—266 317—319
7	Обоснованіе арифметическихъ дѣйствій.	<i>В. А. Соколовъ.</i>	II. 124—128
8	Вопросъ объ измѣреніяхъ и мѣрахъ въ системѣ арифметики.	<i>Л. А. Сельский.</i>	II. 319—320
9	Вопросъ о дробяхъ въ курсѣ ари-ки.	<i>К. Ө. Лебедни-цовъ.</i>	II. 209—231
10	Приближенныя и сокращенныя вычисленія въ средней школѣ.	<i>В. А. Крогусъ.</i>	II. 231—244
11	Курсъ теоретической ари-ки въ старшихъ классахъ средней школы.	<i>В. В. Пютров-скій.</i>	I. 190—219
12	Элементы теоріи чиселъ въ средней школѣ.	<i>Л. Н. Чистяковъ.</i>	I. 245—253
13	Ирраціональныя числа въ средней школѣ.	<i>Т. А. Афанась-ва-Эренбергъ.</i>	I. 253—276
14	Отдѣлъ логарифмовъ въ средней школѣ.	<i>В. А. Марковичъ.</i>	II. 273—285
15	О желательныхъ измѣненіяхъ въ программахъ по алгебрѣ женскихъ гимназій Мин. Нар. Просвѣщенія.	<i>Г. Н. Кузнецовъ.</i>	II. 165—176
16	Объ алгебраическихъ преобразованіяхъ.	<i>Д. М. Леситусъ.</i>	II. 245—250
17	О графическомъ методѣ рѣшенія системы уравненій.	<i>Д. Э. Тенисръ.</i>	II. 286—295

18	Примѣненіе графическаго метода въ средне-школьномъ курсѣ.	<i>Н. А. Томилинь.</i>	I. 346—375
19	Помографія и ея значеніе для средней школы.	<i>М. А. Франкъ.</i>	I. 319—346 368—375
20	Обоснованіе геометріи въ связи съ постановкой ея преподаванія.	<i>С. А. Богомоловъ.</i>	I. 24—53 435—451
21	О систематическомъ курсѣ элементарной геометріи въ средней школѣ.	<i>Д. В. Ройтманъ.</i>	I. 431—434
22	Объ упрощенномъ построеніи курса геометріи и расширеніи ея содержанія.	<i>А. В. Годневъ.</i>	II. 128—130
23	Начала логики въ курсѣ школьной геометріи.	<i>С. А. Неаполитанскій.</i>	II. 202—207
24	Роль геодезическихъ упражненій при обученіи математикѣ.	<i>Д. М. Левицусъ.</i>	II. 314—319
25	Современное состояніе курса геометріи въ средней школѣ въ связи съ обзоромъ наиболѣе распространенныхъ учебниковъ.	<i>Н. А. Извольскій.</i>	II. 73—96
26	Начальный (проедентическій) курсъ геометріи. Его цѣли и осуществленіе.	<i>А. Р. Кулинеръ.</i>	I. 376—412 436—451
27	О первой теоремѣ элементарной геометріи Евклида.	<i>Н. М. Трачевскій.</i>	II. 296—300
28	Построеніе параллелограммовъ.	<i>Н. Н. Александровъ.</i>	II. 300—304
29	Принципы совмѣстности плоскихъ и пространственныхъ фигуръ.	<i>Е. С. Томашевичъ.</i>	II. 304—314 317—319
30	Неевклидова геометрія въ средней школѣ.	<i>Н. А. Долгушинъ.</i>	I. 150—155 436—451
31	Постановка преподаванія началъ анализа въ средней школѣ.	<i>Ф. В. Филипповичъ.</i>	I. 101—128
32	Объ анализѣ безконечно-малыхъ въ средней школѣ.	<i>М. Г. Попруженко.</i>	I. 577—579 117—128

33	По вопросу о постановкѣ преподаванія мат-ки, главнымъ образомъ аналитической геометріи и анализа безконечно-малыхъ въ реальныхъ училищахъ Кавказскаго учебн. округа.	<i>Б. К. Крамленко.</i>	I. 412—431
34	О результатахъ преподаванія началъ анализа безъ малыхъ, аналитической геометріи и теоретической арифметики въ реальныхъ училищахъ и гимназіяхъ.	<i>Проф. П. А. Некрасовъ.</i>	II. 176—179
35	Объ экзаменахъ по математикѣ въ средней школѣ.	<i>Б. А. Марковичъ.</i>	II. 179—184
Преподаваніе мат-ки въ среднихъ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ и въ коммерческихъ училищахъ.			
1	Курсъ анализа въ среднихъ техническихъ учебн. заведеніяхъ.	<i>М. Л. Франкъ.</i>	II. 323—331
2	О необходимыхъ отдѣлахъ мат-ки для экономическихъ наукъ.	<i>Проф. П. А. Некрасовъ.</i>	II. 332—334
3	О постановкѣ преподаванія мат-ки въ коммерческихъ училищахъ.	<i>П. Л. Бакуменко.</i>	II. 334—337
Согласованіе программъ математики средней и высшей школы.			
1	О согласованіи программъ въ средней и высшей школахъ.	<i>Проф. К. А. Поссе.</i>	I. 452—458 468—479
2	Къ вопросу о согласованіи программъ мат-ки въ средней и высшей школѣ.	<i>Проф. В. В. Струве.</i>	I. 458—479
Подготовленіе учителей математики.			
1	О подготовленіи преподавателей мат-ки для среднихъ учебныхъ завед.	<i>Пр.-доц. В. Г. Каганъ.</i>	I. 479—554

2	Курсы для подготовленія кандидатовъ на учительскія должности въ кадетскихъ корпусахъ.	<i>С. П. Шохоръ Троицкій.</i>	I. 555—558
3	Временные педагогическіе курсы Киевскаго учебнаго округа.	<i>И. А. Домининъ.</i>	I. 558—560
4	Женскій Педагогическій Институтъ.	<i>Н. Н. Гернетъ.</i>	I. 560
5	Учительскія семинаріи.	<i>Н. Т. Зубковъ.</i>	I. 560—564

Дѣятельность математическихъ обществъ и кружковъ.

1	Математическое отдѣленіе Рижскаго Педагогическаго Общества.	<i>Ф. А. Эрнъ.</i>	I. 287—295
2	Варшавскій кружокъ преподавателей мат.-н.	<i>И. А. Пажитковъ.</i>	I. 296—298
3	Математическо-физическій кружокъ въ Варшавѣ.	<i>В. Р. Мрочекъ.</i>	I. 298—299
4	Орловскій физико-математическій кружокъ.	<i>И. П. Острогорскій.</i>	I. 299—300
5	Полочеркасскій математическій кружокъ.	<i>Г. П. Кузнецовъ.</i>	I. 300—301
6	Московскій математическій кружокъ.	<i>Г. П. Чистяковъ.</i>	I. 301—303
7	Нижегородскій математическо-астрономическій кружокъ.	<i>В. В. Мурашевъ.</i>	I. 303
8	Отдѣлъ математики Педагогическаго Музея в.-уч. зав. (Пет.).	<i>Д. М. Левитусъ.</i>	I. 304—316

Научные доклады.

1	О постулатахъ, лежащихъ въ основаніи понятія о величинѣ.	<i>Пр.-дон. С. О. Шатуновскій.</i>	I. 276—287
2	О преобразованіи многогранниковъ.	<i>Проф. В. Ф. Казанъ.</i>	I. 579—604

Списокъ членовъ и гостей Съезда.

Эпизодички означаютъ гостей Съезда. Если при фамилии не поставлено званія, то надо подраз. преим. мат.

- 1 Абрамовичъ, Ив. Галр., Бѣлостокъ.
- 2 Анудисъ-Авудевичъ, Яросл. Осип., Ташкентъ.
- 3 Авдыкинъ, Дм. Адт., Тула
- 4 Аврамонтъ, Евг. Паял., С.-Петербургъ.
- 5 Ага Неймалъ, Сол. Абр., Капратъ, Бессар. г.
- 6 Агаркопъ, Бор. Иван., Кобеляки, Полтавск. губ.
- 7 Агрономовъ, Пик. Алекс., Ровель.
- 8 Агура, Алекс., Дмитр., прпп-док., Одесса.
- 9 Адамсню, Василій Флор., Черпиговъ.
- 10 Адриаловъ, Вас. Вас., П. Новгородъ.
- 11 *Айспинштейнъ, Консалъ Аврум., канд. ком. наукъ, С.-Петербургъ.
- 12 Акипфевъ, Ник. Вас., Тифлисъ.
- 13 Акимовичъ, Ник. Вас., Одесса
- 14 Аксюкъ, Апат. Павл., зав. гимн., С.-Петербургъ.
- 15 Аксюкъ, Екат. Павл., Харьковъ.
- 16 Алавердяницъ, Георг. Дан., Ст. Лабянская, Куб. области.
- 17 Александровъ, Алекс. Георг., Одесса.
- 18 Александровъ, Дан. Александр., С.-Петербургъ.
- 19 Александровъ, Пн. Иван., Москва.
- 20 Александровъ, Пик. Ив., Симферополь.
21. Ажницинъ, Евг. Ник., С.-Петербургъ.
- 22 Алферова, Ал. Самс., Москва.
- 23 Альбертъ, Леонг. Андр., Пикол Городокъ, Саратов. губ.
- 24 Алькивлетъ, Матильда Львов., С.-Петербургъ.
- 25 Аммосовъ, Алексѣй Митр., директ. реалъ. уч., Темрюкъ.
- 26 Андреевъ, Александр. Петр., Владикавказъ.
- 27 *Андреевъ, Викт. Андр., оконч. Унив., Краснослободскъ, Пенз. губ.
- 28 Андриаловъ, Влад. Илл., С.-Петербургъ.
- 29 Андрушкевичъ, Исоп. Адам., дир. комм. уч., Ямбургъ.
- 30 Анкѣева, Вѣра Петр., Саранскъ Пензенск. г.
- 31 Ангуевъ, Мит. Яков., Либана.
- 32 Антасова, Екатерина Николаевна, Воронежскъ.
- 33 Антоновъ, Влад. Млх., Вытегра, Олон. губ.
- 34 Антоновъ, Григ. Ник., Барнауль.
- 35 Антоновъ, Ник. Ив., С.-Петербургъ.
- 36 Аяроновъ, Колет. Матв. С.-Петербургъ.
- 37 Арбузовъ, Вал. Мих., директ. ремесл. уч. Цес. Николая, С.-Петербургъ.
- 38 Архангельскій, Серг. Павл., Ржевъ, Тверск. губ.
- 39 Архангельскій, Серг. Конст., С.-Петербургъ.
- 40 Архимоничъ, Александра Одуард., Киевъ.
- 41 Архимоничъ, Зип. Алопьевичъ, дир. коммерч. учил., Киевъ.
- 42 Афанасевъ, Алексѣй Дмитр., С.-Петербургъ.
- 43 Асопская, Зип. Алекс., Вольскъ, Полт. губ.
- 44 Бабанскій, Евг. Вас., С.-Петербургъ.
- 45 Бабаджанъ, Авр. Веніам., Симферополь.
- 46 Бабичевъ, Оед. Андр., Одесса.
- 47 Вааревичъ, Мих. Фед., Окр Инспект., Казань.
- 48 Вайшева, Айпулъ-Халикъ Мухамеджановна, Саранскъ, Пенз. губ.
- 49 Байдалыковъ, Мих. Иван., дир. ком. уч., Ковтоуль, Черниг. губ.
- 50 Вайеръ, Александръ Оттовичъ, директ. ком. уч., Полтава.
- 51 Вакуменко, Ив. Андр., Мелитополь, Тавр. губ.
- 52 Балабуха, Игорь Влад., Одесса.
- 53 Валатюкъ, Вас., Никит., Немировъ, Под. губ.

- 54 *Валдига, Екат. Ермон, слуш. в. жеп. курс., Сиб.
- 55 Балковский, Вик. Ив., Глуховъ, Черн. губ.
- 56 Баранова, Люб. Конст., Екатеринбургъ.
- 57 Барановъ, Петръ Алекс., Москва.
- 58 *Барацъ, Елья. Сем., слуш. выс. ж. курс., Сиб.
- 59 Барачицк., Влад. Ив., Мариуполь, Екат. губ.
- 60 Барсовъ, Бор. Петр., С.-Петербургъ.
- 61 Бартошевичъ, Ад. Иосиф., Воронеж, Новгород. г.
- 62 Барцъ, Рох. Θεод., Кишиневъ.
- 63 Барховъ, Григ. Вас., исп. р. уч., Гродн.
- 64 Бастуновъ, Алексѣй Алекс., Вольскъ.
- 65 Бастрянгина, Мар. Алекс., Барнауль, Томск. губ.
- 66 Батамановъ, Ив. Емел., Москва.
- 67 Бауманъ, Вал. Идг., Липин, Орл. губ.
- 68 Бахтдае, Георгій Петр., Серпуховъ, Моск. губ.
- 69 Башинскій, Ромилъ Ив., С.-Петербургъ.
- 70 Безакъ, Ник. Алекс., С.-Петербургъ.
- 71 Бекъ, Левъ Фед., Карсъ.
- 72 Бешинъ, Бор. Ант., Гжатскъ, Смол. губ.
- 73 Бергъ, М. О., завѣд. Реформ.-уч., Москва.
- 74 Березина, Вѣра Влад., С.-Петербургъ.
- 75 Березкинъ, Алекс. Мих., Видава, Курл. губ.
- 76 Березовскій, Манасій Осип., лаж. техн., С.-Петербургъ.
- 77 Беренгартенъ, Ольга Алекс., Коломна, Моск. губ.
- 78 Беряевъ, Иос. Рост., Николаевъ, Херс. губ.
- 79 Берштейнъ, Серг. Нат., пр-доц., Харьковъ.
- 80 Билима-Настерпаковъ, Андр. Фил., исп. 7 глм., Варшава.
- 81 Благовидовъ, Алексѣй Ив., Вѣлостокъ.
- 82 Блиновскій, Пет. Як., Перм. г., Касимовск. язи.
- 83 Бобейко, Ант. Фед., Гадомъ.
- 84 Боборыкинъ, Конст. Хрисавф., Слуцкъ, Мин. г.
- 85 Бобринъ, Зинаида Алекс., Крошадтъ.
- 86 Бобылевъ, Влад. Никол., Царское-Село.
- 87 Бобылинъ, Викт. Викт., проф., Москва.
- 88 Бобятинскій, Ал-др. Ал-др. Вильно.
- 89 Божанъ, Ник. Алекс., Херсонъ.
- 90 Богомазъ, Сем. Корн., Ростовъ н/Д.
- 91 Богомоловъ, Степ. Александр., преп. Политехн. в. Мед. вѣст., С.-Петербургъ.
- 92 Богославскій, Бор. Юліев., Царичинъ.
- 93 Боголялевская, Софія Петровна, Ст. Славянск., Кувавск. Обл.
- 94 Богоилевскій, Ив. Андр., Н.-Полгородъ.
- 95 Богусъ, Влад. Ив., Ейскъ, Кубанск. обл.
- 96 Бодрова, Марія Алекс., Камышня, Саратов. губ. Ж. Г.
- 97 Бойко, Алексѣй Гим., Рига.
- 98 Бойцовъ, Иванъ Михайловъ, Свислочь, Гродн. г.
- 99 Бойдыревъ, Влад. Ал-др. ин-спект. пиротехн. учил., С.-Петербургъ.
- 100 Больше - Гатарицскій, Влад. Конст., Выборгъ.
- 101 Боль, Луиза Генр. г. Слободской, Вятск. губ.
- 102 Влохенфельдъ, Мих. Ром., С.-Петербургъ.
- 103 Борисовъ, Харит. Игнатъев., исп. промчмдлн. Село Горондецъ, Нижегород. губ.
- 104 Бочекъ, Евгения Влад., Грайворонъ, Курск. губ.
- 105 Браунъ, Петръ Петр., Павловскъ, Воронеж. губ.
- 106 Бранскій, Никол. Аполлн., С. Петербургъ.
- 107 Брусилонскій, Гр. Конст., студ. Учили. Сиб.
- 108 Вугославская, Нат. Григ., Москва.
- 109 Вудалева Лид. Вас., дом. учит., С. Петербургъ.
- 110 Вудяскій, Влад. Вас., Черкасск.
- 111 Вуйницкій, Леон. Фауст., Вак.
- 112 Вуладова, Елена Ив., С.-Петербургъ.
- 113 Булаковъ, Ник. Венед., Астрахань.
- 114 Булгаковъ, Як. Ник., Подоль.
- 115 Булдыревъ, Сер. Матв., Двинскъ.
- 116 Булдырская, Евг. Турьева, Воронеж, Новгород. г.
- 117 Булычевъ, Ал. Мих., дпр. м. гим., Ставрополь-губ.
- 118 Булыжинъ, Евгений Никол., Вѣлостокъ.
- 119 Бурневскій, Дм. Никиф., Кіевъ.
- 120 Бурцевъ, Сер. Ив., Екатеринбургъ, Куб. обл.
- 121 Бутягнъ, Алекс. Серг., Москва.
- 122 Бухаринъ, Нв. Гавр., Москва.
- 123 Быкова, Варвара Николаевна, С.-Петербургъ.
- 124 Буковская, Зоя Иосиф., С.-Петербургъ.

- 125 Вистровъ, Бор. Ал-др. Киржачъ, Влад. губ.
- 126 Блжспяъ, Дм. Зах., Иркутскъ
- 127 Вйлогорскій, Ив. Анаст., испи. кл. Орл.-Вхтг кад. корп. Орелъ.
- 128 Вйлогорцевъ, Фед. Алекс., Астрахань.
- 129 Бйленя, Елпв. Вас., Вйловскъ, Повг. губ.
- 130 Бйляевъ, Ив. Вас., дир. реальн. уч. Выборгъ.
- 131 Бйлько, Ип. Клар., Пятлгорскъ
- 132 Бйльскій, Вас. Вас., дир. реальн. уч., Милнъ, Орл. губ.
- 133 Вйляевъ, Николай Милн. Харьковъ.
- 134 Бйльтепелъ, Ив. Мих., Вольмаръ, Милн. губ.
- 135 Вйлюпасъ, Чеславъ Алт. Ръжниця Витобск. губ.
- 136 Вйляпкинъ, Алекс. Степ., С.-Петербургъ.
- 137 Вйляпкинъ, Ив. Ив., проф. Харьковъ.
- 138 Влюмбергъ, Гапсх. Ждановъ, Сиб. Крестов. Остр. Морской 41, кв. 22.
- 139 Вагнъ, Пет. Петр., Смаранъ, Сиб. губ.
- 140 Вакормякъ, Иванъ Мартын., Директ. Мужск. Гимн., г. Александр.-Грушоп.
- 141 Валькъ, Ив. Вас., Юрьевъ, Ипфл. губ.
- 142 Вальмилъ, Анна Ипк., С.-Петербургъ.
- 143 Вальтеръ, Над. Конст., Гродно.
- 144 Варагушпъ, Вас. Мих., Екате-рипод., Куб. обл.
- 145 Варгнъ, Мих. Андр., Орелъ.
- 146 Васильова, Алекс. Феофил., С.-Петербургъ.
- 147 Васильева, Ольга Ипк., Красноуфимскъ, Перм. губ.
- 148 Васильева, Гул. Мих., Грязовецъ.
- 149 Васильевъ, Ал. Вас., профес., С.-Петербургъ.
- 150 Васильковъ, Кан. Сем. Рига.
- 151 Вахрушева, Людмила Андреевна, Сиб.
- 152 Вахтпна, Елпва Вас., нач. гимн., Дербентъ, Дагест. обл.
- 153 Ващенко-Захаренко, Людм. Як., Мог.-Подол.
- 154 Ващиская, Марія Андр. Мпнскъ.
- 155 Веберъ, Алекс. Федор., Окруж. Иксп., Харьковъ.
- 156 Верховскій, Пав. Мих., дир. ком. уч., Ростовъ на-Дону.
- 157 Вержиковскій, Аоап. Матвеевичъ, Павлоградъ, Екатеринбургъ.
- 158 Ветуховъ, Алекс. Вас., Харьковъ.
- 159 Викторовъ, Ипк. Вас., Эриванъ.
- 160 Вйпарскій, Пет. Генр., Ковстонъ, Черп. губ.
- 161 Виппскій, Гр. Сам., Ростовъ на-Дону.
- 162 Вйпградова, Анна Вас., Курскъ.
- 163 Вйпградова, Мар. Вас., Кострома.
- 164 Вйпградова, Юлія Мпх., Великій Устюгъ, Вологод. губ.
- 165 Вйпградовъ, Ив. Ал., предсѣд. Под. Сов. жепск. гимн., Старая Руеса.
- 166 Вйпградовъ, С. Н., Москва
- 167 Вйпградскій, Ольга Афилог., нач. смх., Москва.
- 168 Вйпкурона, Анна Алексѣев., Усмань, Тамб. губ.
- 169 Вйпкуроевъ, Бор. Пилл., Варшава.
- 170 Вйпняковъ, Сер. Пик., С.-Петербургъ.
- 171 Вйляковъ, Степ. Ипк., Вендеръ, Вессар. губ.
- 172 Власова, Марія Осодоровна, С.-Петербургъ.
- 173 Волжкова, Евгения Д., Одоевъ, Тульск. губ.
- 174 Волновъ, А. Д., Павловскъ, Нороможск. губ.
- 175 Войтенико, Дм. Пилл., Нововыбковъ, Черп. губ.
- 176 Войцѣховскій, Стан. Алекс., Екатеринбургъ.
- 177 Вознесенскій, Елпв. Ипк., С.-Петербургъ.
- 178 Вознесенская, Над. Ипк., С.-Петербургъ.
- 179 Вознесенскій, Ник. Петр., Курскъ.
- 180 Волкова, Елпва Вас., С.-Петербургъ.
- 181 Волковъ, Алекс. Алекс., Москва.
- 182 Волковскій, Дмитр. Лукпчъ, Москва.
- 183 Володковичъ, Ипк. Ипк., дир. ком. уч., Кіевъ.
- 184 Волокоблскій, Михаилъ Евгепиенъ, Рига.
- 185 Волосевскій, Казим. Владисл., Обл. в. Дошского, ст. Усть-Медвйдицкая.
- 186 Воробьева, Ольга Пил., Гадячъ, Полт. губ.
- 187* Воронпна, Екат. Петр., сл. п. ж. кур., С.-Петербургъ.
- 188 Вороновъ, Ипк. Ип., испи. кад. корп., Псковъ.
- 189 Воскресенскій, Пав. Мих., Липны, Орл. губ.
- 190 Воскресенскій, Мих. Петр., Сколяпъ, Рязан. губ.
- 191 Воселка, Грпг. Фед., Лубны, Полт. губ.
- 192 Вулякъ, Зах. Зах., С.-Петербургъ.
- 193 Выходцевъ, Алекс. Ипк., испи. муж. гим., Вердланскъ.

- 194 Гавриловъ, Илья Андреевичъ, С.-Петербургъ.
- 195 Гавриловъ, Ин. Алекс., село В. Дедеркалы, Вознесенской губ.
- 196 Галашидзе, Марія Конст., Иро-слиань.
- 197 Гачечпладзе, Пав. Фраст. Томарукъ.
- 198 Галашицъ, Дм. Дм. Москва.
- 199 Галунова, Софія Павл., С.-Петербургъ.
- 200 Гарлицъ, Марія Георгиевна, С.-Петербургъ.
- 201 Гаряевъ, Павелъ Серафимъ, Харьковъ.
- 202 Гартмана, Влад. Павл., С.-Петербургъ.
- 203 Гатлихъ, Ал. Фед., Москва.
- 204 Гебель, Валер. Яковлевъ, директ. мех.-технич. уч., Москва, Савинск. пер.
- 205 Гельдеръ, Ал. Пав., дир. р. уч., С.-Петербургъ.
- 206 Гельманъ, Вик. Пав., Астрахань.
- 207 Георгиевскій, Павл. Никол., С.-Петербургъ.
- 208 Гербо, Влад. Алекс., Пололе-кавдріа, Люблин. губ.
- 209 Гернетъ, Надежда Ник., проф. Мед. Инст., С.-Иб.
- 210 Герцбергъ, Бор. Леопольд., инж.-техпол., С.-Петербургъ.
- 211 фонъ-Герцъ, Наталья Павлов., С.-Петербургъ.
- 212 Гилъбергъ, Влад. Карл., дир. р. уч., Зарвайскі, Рязан. губ.
- 213 Гилъровскія, Зои Алексеевна, Рязань.
- 214 Гирс. Фридр. Юліан., Варшава.
- 215 Гирманъ, Сергій Викитичъ, Люблинъ.
- 216 Глаголева, Людм. Вас., С.-Петербургъ.
- 217 Глаголевъ, Ин. Павл., С.-Петербургъ.
- 218 Глаголева, Александра Алекс., Москва.
- 219 Гибдовскій, Дмитр. Дмитр., Гомель, Могилев. губ.
- 220 Годиситъ, Алексѣй Вас., дир. ж. т. п. Симбирскъ.
- 221 Говяловъ, Мих. Март., подполк., Симбирскъ.
- 222 Головинская, Ольга Никол., Вильница, Подол. губ.
- 223 Гольденбергъ, Авен., г. Каховка, Таврич. губ.
- 224 Голонкина, Еллаав. Петр., Ду-хонидина, Смолен. губ.
- 225 Гончаровъ, Павелъ Максимов., С.-Петербургъ.
- 226 Гончаровъ, Пав. Сем., Влады-кастокъ.
- 227 Горбачевъ, Мих. Серг., Мариу-поль.
- 228 Гордеева, Вѣра Вас., Вольскъ, Саратов. губ.
- 229 Гордешевъ, Иппол. Митроф., Умани, Киевск. губ.
- 230 Гордонъ, Мих. Борис. Киевъ.
- 231 Горещкая, Ольга Николаевна, Бѣлостокъ.
- 232 Горетъ, Анатол. Мих., Москва.
- 233 Горичниковъ, Гринг. Ин., Та-ланрогъ.
- 234 Горлиновъ, Гапр. Гапр., Н.-Ново-городъ.
- 235 Готъ, Карлъ Ин., Овдосія.
- 236 Гостиниловскій, Никол. Алекс., инж. торг. инт., г. Варшава.
- 237 Гофманъ, Вас. Вас., Проску-ровъ, Под. губ.
- 238 Грабовскій, Конст. Никол., Пол-тава.
- 239 Граковъ, Д. В. Гжатскъ.
- 240 Гравъ, Исакъ Марковичъ, дом. уч., Симб.
- 241 Грудъ, Ин. Як., Ивановскъ, Воронеж. губ.
- 242 Грацинская, Анна Вас., С.-Пе-тербургъ.
- 243 Гринцанскій, Ин. Ин., С.-Пе-тербургъ.
- 244 Гриневъ, Фед. Вас., С.-Пе-тербургъ.
- 245 Гриневъ, Вас. Вас., инж. реалъп. учил., Латвия.
- 246 Гренбергъ, Карлъ Алекс., Поне-вѣжъ, Кол. г.
- 247 Гренова, Елиза. Аким., Тула.
- 248 Грингоревъ, Андр. Афанас., Ека-теринбургъ.
- 249 Грингоревъ, Елсен. Ин., Сара-товъ.
- 250 Грингоревъ, Сем. Степ., С.-Пе-тербургъ.
- 251 Грингоревъ, Алекс. Мих., Сим-бирскъ.
- 252 Грингоревна, Евгения Валентин., С.-Петербургъ.
- 253 Грингорьевичъ, Инк. Арт. Ново-російскъ.
- 254 Грингуъ, Николай Георгиевичъ, Самаркандъ.
- 255 Гриницъ, Вениам. Сол., С.-Пе-тербургъ.
- 256 Гриненко, Никол. Прокоф., Харь-ковъ.
- 257 Гриняевъ, Викт. Кеалеріев., Исконъ.
- 258* Гродецкій, Мих. Вас., студ. матем. Сиб. ун-та, С.-Пе-тер-бургъ.
- 259 Громова, Александра Вас. г. Куанецк., Саратов. губ.
- 260 Громова, Анна Инк., г. Темни-ковъ, Тамбов. губ.
- 261 Грузинцевъ, Иванъ Георгиевичъ, Колозринъ, Костром. губ.
- 262 Грюнбергъ, Теппсъ Авдр., Валкъ, Инфл. губ.
- 263 Гудина, Марія Никол., Орен-бургъ.

- 264 Гуконъ, Степ. Яковл., съ. Камен-
ская. Дон. Обл.
265 Гукъ, Андр. Дмитр., Ровно.
266 Гурандъ, Никол. Власьев., С.-Пе-
тербургъ.
267 Гурджанидзе, Евгенія Игнат.,
Харьковъ.
268 Гуряповъ, Серг. Поликрат., Нѣ-
жнъ.
269 Гусиковскій, Праск. Васил.,
Тихвинъ, Новгород. губ.
270 Гусова, Луи. Ив., Трубчевскъ,
Орлов. губ.
271 Гусевъ, Георг. Вас., Москва.
272 Гуссовъ, Викт. Макарь., дяр.
Александров. комм. уѣз., Кремен-
чугъ.
273 Гушптъ, Василій Федоровичъ,
Псковъ.
274 Гюнтеръ, Николай Максимов.,
проф., С.-Петербургъ.
275 Давидекомъ, Ник. Ив., дяр.
Росл. уѣз., Скопинъ.
276 Давидовъ, Рубенъ Капріел.,
Кашинъ.
277 Давыдовскій, Ал. Ал., Рыбинскъ.
278 Даниель, Михайл Кириков., Ека-
теринподаръ.
279 Даринскій, Алексѣй Ильичъ,
С.-Петербургъ.
280 Де-Лавари, Алекс. Ник., Гат-
чина.
281 Денцельскій, Сем. Андр., дяр.
ком. уѣз. Кіевъ.
282 Дерингъ, Серг. Георг., С.-Петер-
бургъ.
283 Деруновъ, Константинъ Николаев.,
С.-Петербургъ.
284 Дерабинъ, Ив. Сем., С.-Петер-
бургъ.
285 Джигитъ, Сам. Дав., Камратъ,
Вас. губ.
286 Дамарскій, Станис. Иковлев.,
Лабар. Политехн. Института,
Варшава.
287 Дирдовскій, Анат. Ив., Мозырь,
Минск. губ.
288 Діанна, Нат. Ник., Луга.
289 Дмитріевъ, Конст. Алексѣев.,
С.-Петербургъ.
290 Добровольская, Ек. Андр., г.
Устюжна, Новгород. г.
291 Добровольскій, Ник. Ив., Юрь-
евъ.
292 Добровольскій, Евг. Ив., Ека-
теринславъ.
293 Добровольскій, Мих. Александр.,
Сердобскъ.
294 Доброхотовъ, Петръ Мих., То-
больскъ.
295 Довгалъ, Дм. Ив., Елецъ, Орлов.
губ.
296 Довгирдъ, Мих. Фадд., С.-Петер-
бургъ.
297 Долгушинъ, Пав. Александр.,
Кіевъ.
298 Доляно-Добровольская, Софія
Гавр., С.-Петербургъ.
299 Доляко, Влад. Лавар., Тула.
300 Домбровский, Левъ Фелпкс.,
С.-Петербургъ.
301 Домбровский, Федоръ Андреев.,
Саратовъ.
302 Домбровъ, Владиславъ Влади-
слав., Варшава.
303 Добошанская, Ольга Иосиф.,
Гатчина.
304 Дроблявъ, Ал. Иос., инспект.
комм. училища, Тифлисъ.
305 Дробяко, Мих. Павлов., дяр.
р. уѣз., Сумы.
306 Дровцовъ, Влад. Ник., Остро-
гожскъ.
307 Дубровинъ, Александръ Вас.,
Валу.
308 Дубравинъ, Влад. Ив., Псковъ.
309 Душина, Анаст. Евг., С.-Петер-
бургъ.
310 Душъскій, Оадей Ромуальд.,
Томскъ.
311 Дыкловъ, Анна Петровна,
С.-Петербургъ.
312 Дыховъ, Дм. Ив., С.-Петер-
бургъ.
313 Евралиновъ, Ник. Дмитр., С.-Пе-
тербургъ.
314 Евтушенко, Георг. Вас., Алек-
сандровскъ, Екатеринбургск.
губ.
315 Егерь, Елиа. Осед., Тобольскъ.
316 Егорова, Иосиф. Андр., Екате-
ринподаръ.
317 Егоровъ, Иосиф. Ал., Екатеринбург-
славъ.
318 Егоровъ, Влад. Вас., Москва.
319 Егуловъ, Влад. Алекс., С.-Пе-
тербургъ.
320 Егуновъ, Ив. Андр., С.-Петер-
бургъ.
321 Езерскій, Георг. Михайл. Ва-
тебскъ.
322 Ектовъ, Михайлъ Иванович., пис-
р. уѣз., Минскъ, Тамб. губ.
323 Елапскій, Мих. Петръ, С.-Петер-
бургъ.
324 Елизаровъ, Вас. Мих., Мос-
лавъ.
325 Елковскій, Ал. Арс., м. Вѣжица
Орлов. губ.
326 Ельцова, Над. Акинд., Витебскъ.
327 Емельянова, Сераф. Прок., Вла-
димостокъ.
328 Енько, Петръ Дм., дяр. уч-
илух., С.-Петербургъ.
329 Енфановъ, Алиръ Зивон., За-
мостье, Любл. г.
330 Ермакова, Надежда Ив., Сумы,
Харьк. губ.
331 Ефимовъ, Влад. Павл., Мал-
мыжъ, Вятск. губ.
332 Ефремовичъ, Вас. Порф., Мо-
сква.

- 333 Ефремовъ, Дм. Дмитр., Ина-
полю-Вознесенскъ.
- 334 Иванколя, Ник. Исид., С.-Петер-
бургъ.
- 335 Исканко, Григ. Иван., Вильна.
- 336 *Исдавъ-Пушквичъ, Ник. Андр.,
проез. естественн., Екатеринбургъ,
Кубан. обл.
- 337 Жемайтисъ, Сиг. Осип., Вильна.
- 338 Жилинский, Алекс. Ив., Москва.
- 339 Жуганъ, Емел. Діом., Елисавет-
градъ.
- 340 Жуковъ, Вор. Осип., г. Лю-
блинъ.
- 341 Заболотская, Алекс. Ник., Ко-
строма.
- 342 Забудский, Николай Александр.,
проф. Артил. Ак., С.-Петер-
бургъ.
- 343 Загребияъ, Владиміръ Дмитр.,
Вильна.
- 344 Загребскій, Октав. Тимео., Сѣд-
лецъ.
- 345 Загуляйъ, Вас. Ермол., Екате-
ринославъ.
- 346 Закладный, Мих. Леонт., Арма-
виръ, Куб. обл.
- 347 Залесскій, Мих. Конст., Имп.
торг. школы, г. Курскъ.
- 348 Заманинкова, Анна Зах., Тем-
никовъ, Тамб. г.
- 349 Зандбергъ, Ив. Егор., Гольдн-
генъ, Курл. губ.
- 350 Зинаидицъ, Врон. Кшир., Сара-
тога.
- 351 Зипороженецъ, Леоп. Гринг., Харь-
ковъ.
- 352 Зипороженецъ, Алекс. Грингор.,
Харьковъ.
- 353 Зивригастъ, Алекс. Владим.,
хут. Романовскій, Куб. обл.
- 354 Зироченцевъ, Ив. Трофим., Бого-
духовъ, Хар. г.
- 355 Засимчукъ, Адамъ Герас., г.
Гжатскъ.
- 356 Засухина, Ольга Ник., г. Конно.
- 357 Захарова, Марія Ник., Ташкентъ.
- 358 Захаровъ, В. З., Камышинъ,
Сарат. губ.
- 359 Захаровъ, Ник. Алекс., г. Ека-
теринославъ.
- 360 Захаровъ, Ник. Капит., Ко-
строма.
- 361 Захаровъ, Алекс. Николаев., проф.
Имп. Пут. Сооб., С.-Петербургъ.
- 362 Захарьевскій, Конст. Луинов.,
дир. гимназ., Могилевъ-губ.
- 363 Зачиняевъ, Александръ Ив. испи.
уч. глух., ред. журн. «Обнов-
леніе Школы», С.-Петербургъ.
- 364 Зборовскій, Лука Ант., Нов-
городъ.
адвокатъ, Алекс. Макс., Яро-
славъ.
нѣренъ, Ник. Конст., С.-Петер-
бургъ.
- 367 Здавовичъ, Францъ Владисл.,
Мятава.
- 368 Здровскій, Стеф. Исидор., г. Рѣ-
жица, Витеб. г.
- 369 Зетеръ, Серг. Матв., Москва.
- 370 Зейкова, Алек. Никодимовна,
зав. уч., Томскъ.
- 371 Зерновъ, Георгій Сергѣевичъ, Мо-
сква.
- 372 Зенковъ, Леоп. Едламп., Томскъ.
- 373 Зяновентъ, Ник. Иван., Пул-
тускъ, Варш. губ.
- 374 Знаменскій, Мих. Алексѣев.,
С.-Петербургъ.
- 375 Знаменскій, Петръ Вас., Ко-
строма.
- 376 Зубковъ, Ив. Троф. Горн, Тифл.
губ.
- 377 Зѣмель, Эдмундъ Христіан., Ви-
тебскъ.
- 378 Ипановскій, Мих. Н., Казань.
- 379 Ипановскій, Ник. Ив., Креме-
нецъ, Волин. г.
- 380 Ипанова, Варв. Александр., С.-Пе-
тербургъ.
- 381 Ипановъ, Александръ Алексѣев.,
Вильна.
- 382 Ипановъ, Ник. Петр., Князевъ,
Сам. губ.
- 383 Ипановъ, Мео. Вас., Екатеринбургъ.
- 384 Ипановъ, Мих. Леоп., окр. испи.
Зап.-Сиб. уч. окр. Томскъ.
- 385 Ипановъ, Фед. Ник., Суналка.
- 386 Ипановъ, Ник. Ал., Старая-
Русса.
- 387 Ипановъ, Петръ Ал., испи. р.
уч., Могилевъ-губ.
- 388 Иницкій, Енис. Палладъ, Харь-
ковъ.
- 389 Ивовольскій, Ник. Ал., Москва.
- 390 Изпосковъ, Иліод. Ал., С.-Пе-
тербургъ.
- 391 Ильяшева, Варв. Ник., Харьковъ.
- 392 Ильяшеничъ, Анаст. Никол., ди-
рект. комм. уч. ст. Окуловка,
Ник. ж. д.
- 393 Ильиневичъ, Софія Дмитр., ст.
Окуловка.
- 394 Имшенецка, Марія Мих., Харь-
ковъ.
- 395 Исаковъ, Леоп. Дмитр., Имп.
Гл. Мал. нѣр. пѣвцовъ, С.-Пе-
тербургъ.
- 396 Иодыскій, Як. Варо., С.-Петер-
бургъ.
- 397 Иозефовичъ, Пав. Матв., дир.
гимн. п. р. уч., Сиб.
- 398 *Юцъ, Влад. Викт., Ковно.
- 399 Каверанела, Эпх. Павл., С.-Пе-
тербургъ.
- 400 Каверанела, Людм. Панд. Кляно.
- 401 Кавокниъ, Порф. Никол., влж-
техн., Тукумъ, Курл. губ.
- 402 Кануцъ, Ив. Ник., дис. уч. инж.,
С.-Петербургъ.

- 403 Каганъ, Пав. Исакъ, Зав. част. гимн., Вильна.
- 404 Каганъ, Вон. Федор., пр-дец., Одесс.
- 405 Казаевская, Ларис. Ал., Павловскій пос., Моск. г.
- 406 Каваровъ, Ари. Иосиф., инсп. реал. учил., Ейскъ, Куб. обл.
- 407 Казанкова, Вѣра Алекс., Торжокъ, Новг. губ.
- 408 Казанская, Анна Сми., Омскъ.
- 409 Калининъ, Вас. Евгр., влси. р. уч., Вологда.
- 410 Каллусъ, Ив. Оом., Проскуронт., Подол. г.
- 411 Калешникъ, Степ. Матв., Усть-Сысольскъ.
- 412 Камениканъ, Софья Петр., Вольскъ, Саратов. г.
- 413 Камонская, Марья Вас., начал. гимн., Троицкъ, Орелбург. губ.
- 414 Канисентъ, Анах. Алекс., Киевъ.
- 415 Крамско, Андр. Анаст., Ейскъ, Куб. обл.
- 416 Карасевъ, Пав. Алекс. Москва.
- 417 Карауши, Ник. Ив., Рига.
- 418 Кирнопская, Нат. Лукьян., Обоянъ, Курск. г.
- 419 Карненко, Автоп. Григор., Томскъ.
- 420 Кирнова, Агния Ив., С.-Петербургъ.
- 421 Кирновъ, Всевол., Юрьевъ, Инф. губ.
- 422 Казинскій, Петръ Мих., Ипатово-Вондесевскъ, Влад. губ.
- 423 Катраповъ, Вас. Пик., Вавки, Харьк. губ.
- 424 Качелонскій, Дмитр. Вас., Орелъ.
- 425 Каширникъ, Иос. Иван., Гжовтъ, Твер. губ.
- 426 Кавыкадзе, Ник. Ермол., Потн.
- 427 Кедрникъ, Евг. Евгр., Самара.
- 428 Кедрова, Вѣра Павла, г. Иваново-Вонисевскъ, Влад. губ.
- 429 Кемарскій, Серг. Михайлов., Славянскъ, Хар. г.
- 430 Кемидкая, Анна Михайл., пом. нач. педаг. пист., С.-Петербургъ.
- 431 Кердертъ, Влад. Юсиф., Одесса.
- 432 Кеуджиковъ, Арут. Кари., Екатеринбургъ.
- 433 Килу, Георг. Сав., Цатигорскъ.
- 434 Кирячневскій, Ром. Ив., Стародубъ, Черниг. г.
- 435 Кирпленико, Надежда Пик., Тула.
- 436 Киркпало - Стацевичъ, Агнесса Вонифатъ, Рига.
- 437 Кирсанова, Маргар. Ив., Юхновъ, Смолен. г.
- 438 Кирцдиль, Влад. Ив., влси. реал. уч., Екатеринбургъ.
- 439 Киселевъ, Андр. Петр., С.-Петербургъ.
- 440 Китлеръ, Евг. Влад., Орелбургъ.
- 441 Кланатиюкъ, Петръ Яковл., влси. гимн., Севастополь.
- 442 Клемментъева, Над. Иван., С.-Петербургъ.
- 443 Кленковъ, Петръ Вор., Астрахань.
- 444 Клеффертъ, Осипъ Владим. Одесса.
- 445 Клейманъ, Леоп. Макс., Рогачевъ, Могилевск. г.
- 446 Климченко, Вас. Ив., Курскъ.
- 447 Климичина, Елиза Ив., С.-Петербургъ.
- 448 Клионитъ, Влад. Михайл., Александроискъ, Евгр. г.
- 449 Кобенева, Ел. Никол., Киевъ.
- 450 Кобеливъ, Охдоръ Егор. И. Новгородъ.
- 451 Ковалевъ, Вас. Мих., Камолецъ-Подольскъ.
- 452 Коваленко, Евг. Арс., Бориспольскъ.
- 453 Ковенко, Алекс. Алекс., Цмитаревъ, Курск. г.
- 454 Ковриганъ, Пик. Ник., С.-Петербургъ.
- 455 Когалъ, Ал. Георг., Гатчина.
- 456 Козлова, Анфиса Алексеевна, С.-Петербургъ.
- 457 Козминскій, Евр. Галр. Москва.
- 458 Кобышевъ, Пик. Михайл., С.-Петербургъ.
- 459 Ковалевскій, Петр. Андр., Умань, Киев. губ.
- 460 Коженикова, Вѣра Пик., Краснослоб., Пенз. г.
- 461 Козаковъ, Алекс. Васил., Москва.
- 462 Козловскій, Адамъ Вячесл., Петрозаводскъ.
- 463 Колобова, Анна Андр., Ст. Осколъ, Курск. г.
- 464 Колоденко, Еват. Анис., Шахтала-на-Цогу.
- 465 Коловчъ, Серг. Георг., Порвонтъ, Инф. г.
- 466 Колубовская, Натал. Алексеевна, С.-Петербургъ.
- 467 Комаровъ, Вяч. Вас., Сестрорецкъ.
- 468 Компанескъ, Петръ Андр., Одесса.
- 469 Комратскъ, Влад. Алекс., дяр 8-й Сиб. гимн., С.-Петербургъ.
- 470 Копцова, Ольга Алекс., Вел. Луки, Пек. г.
- 471 Копоровъ, Ал. Пик., Воронежъ.
- 472 Копоровъ, Серг. Пик. Воронежъ.
- 473 Копюхоль, Ал-др. Гурьев. Дмитровъ, Моск. г.
- 474 Корельковъ, Ив. Абр., С.-Петербургъ.
- 475 Корвинъ, Ник. Никол., Рыбинскъ.
- 476 Коровитъ, Ал. Евг., Казань.
- 477 Коронитъ, Ник. Евг., Слободской, Вятск. губ.
- 478 Коротенко, Пав. Михайл., Книшневъ.

- 479 Корсаковъ, Ал. Алекс., Серпуховъ, Моск. губ.
 480 Корчагинъ, Алекс. Александр., С.-Петербургъ.
 481 Коршъ, Елена Валент., С.-Петербургъ.
 482 Косминковъ, Алексѣй Нап., Ростовъ, Ярослав. г.
 483 Косминковъ, Ив. Сергѣевъ, Егорскскъ, Ряз. г.
 484 Космодемьянская, Вѣра Васил., Вятскъ.
 485 Косолапова, Ксения Владим., Смоленскъ.
 486 Костринскій, Вонд. Абрам., Вильна.
 487 Котельниковъ, Вас. Ив., Саратовъ.
 488 Котрацевъ, Владим. Александр., Александровскъ, Екат. губ.
 489 Купкадимова, Вѣра Вас., Симбирскъ.
 490. Красевскій, Конст. Георг., г. Вильна, Смолен. г.
 491 Крампръ, Серг. Орестъ, Курскъ.
 492 Крамаренко, Борнъ Константи., директ. гнм., Тифлисъ.
 493 Крамаренко, Владим. Иван., Сумы, Харьк. губ.
 494 Крамъ, Влад. Нарцисъ, Звенигородъ.
 495 Красникова, Марья Матв., С.-Петербургъ.
 496 *Краснона, Енд. Акт., слух. писем. жевек. курс., С.-Петербургъ.
 497 Красноперовъ, Кир. Алекс., Тамбовъ.
 498 Краснополцевъ, Ил. Вас., Москва.
 499 Краснополтская, Юлія Олимп., С.-Петербургъ.
 500 Краснослободскій, Мих. Ив., Екатеринбургъ.
 501 Красовскій, Зеновъ Франц., Вилостокъ.
 502 Краузе, Констант. Нап., Уфа.
 503 Крашенинниковъ, Ал. Матв., Курскъ.
 504 Крижницкій, Евг. Конст., Спирит., Киев. губ.
 505 Коровицкій, Евг. Игн., Тифлисъ.
 506 Кротіусъ, Ольга Александр., С.-Петербургъ.
 507 Кроптусъ, Влад. Ад., С.-Петербургъ.
 508 Кропскій, Ив. Эдуард., г. Маршальскъ, Тамб. г.
 509 Крыловская, Мар. Алекс., Звенигородскъ, Киев. г.
 510 Крыжановскій, Илья Михайл., Луганскъ, Екатеринбургъ. губ.
 511 Крыжановскій, Серг. Евс., Копенгагенъ.
 512 Крыловъ, Ил. Ил., Псковъ.
 513 *Крычко, Варв. Федор., слух.
- высп. жен. курс., С.-Петербургъ.
 514 Кузальдизъ, Ил. Дм. Скопнякъ, Рязань, губ.
 515 Кузалева, Зинаида Влад., Моршанскъ, Тамб. г.
 516 Кудренъ, Іосифъ Іосифъ, Скопнякъ, Рязань, губ.
 517 Кудринъ, Влад. Иванъ, С.-Петербургъ.
 518 Кудрявцевъ, Влад. Федор., Вердланскъ.
 519 Кузнецовъ, Илья Кир., ст. Каменская, Дон. обл.
 520 Кузнецовъ, Ил. Нап., Варшава.
 521 Кузнецовъ, Георг. Норф., Ново-черкасскъ.
 522 *Кузнецова, Марія Ил., слухат. Педаг. Инстит. С.-Петербургъ.
 523 Кузьминъ, Александръ Ильичъ, Тверь.
 524 Кулинеръ, Адр. Рупимовичъ, С.-Петербургъ.
 525 Кулаевъ, Пав. Михайл., Горьскъ, Симб. губ.
 526 Кундіусъ, Петръ Григор., Петровск. реальн. уч., Ростовъ на Дону.
 527 Купоритейлъ, Вѣра Матвѣевна, Елизаветградъ.
 528 Купчикъ, Серг. Иванъ, Иваново-Вознесенскъ.
 529 Куралко Петръ Ил., Шаули.
 530 Куртъ, Рост. Григор., Кременчугъ.
 531 Кусковъ, Пав. Ил., С.-Петербургъ.
 532 Кутинъ, Вас. Ил., Ново-воинскъ, Самар. г.
 533 Кюль, Роб. Оскаръ, Вильна.
 534 Кюрасе, Марг. Юрисъ, Марсбургъ, Инф. губ.
 535 Лабутинъ, Мих. Ал-др., Киевъ.
 536 Ладриновичъ, Серг. Акт., Минскъ.
 537 *Лавровская, Анаст. Авдр., слух. писем. ж. курс., С.-Петербургъ.
 538 Лавровъ, С. Ф. Муромъ, Владимиръ, губ.
 539 Лавровскій, Серг. Петр., Минскъ.
 540 Лагутинскій, Мих. Ил., прип. доц., Харьковъ.
 541 Лажошкисъ, Вяч. Алекс., С.-Петербургъ.
 542 Лазаревъ, Ив. Петр., Могилевъ, губ.
 543 Лажошкисъ, Марія Алекс., Копенгагенъ.
 544 Лалтвъ, Сав. Мих., С.-Петербургъ.
 545 Лавчинская, Меланя Андр., Орелъ, губ.
 546 Лавинъ, Ил. Ив., проф., С.-Петербургъ.
 547 Лавъ, Исидоръ Георг., С.-Петербургъ.
 548 Лебедевъ, Мих. Алекс., Рязань

- 549 Лебедевъ, Ин. Вас., Смоленскъ.
 550 Лебедева, Аполлн. Алекс., Саратовъ.
 551 Лебедева, Екатер. Алекс., Саратовъ.
 552 Лебедипская, А. К., Тула.
 553 Лебедипцевъ, Копст. Осиф., Москва.
 554 Лебелъ, Индія Игн., Москва.
 555 *Лепитекая, Анна Яковл., слуш. мисс. жеп. курс., С.-Петербургъ.
 556 Ледеръ, Ник. Конт., Островъ, Пск. губ.
 557 Лепитусъ, Дав. Моис., С.-Петербургъ.
 558 Лейншбергъ, Елиз. Нах., Одесса.
 559 Лекторскій, Арх. Андр., Вѣла, Сидл. губ.
 560 фонъ-Леммельнъ, Гельбъ Алекс., Тифлисъ.
 561 Лермантовъ, Влад. Влад., прив.-доц., С.-Петербургъ.
 562 Леополов, Люб. Пия., Екатеринбургъ.
 563 Леонтовичъ, Ал. Ник., С.-Петербургъ.
 564 Лерхъ-Урдженицъ, Георг. Вильгельм., Дубельтъ, Мифа. губ.
 565 Лехницкій, Георг. Викторъ, Кострома.
 566 Лехницкая, Татьяна Ал., Кострома.
 567 Лещенко, Андр. Иван., Киевъ.
 568 Ликоничъ, Марья Вас., Выборгъ.
 569 Липада, Степ. Кавказ., Вильна.
 570 Ляндбергъ, Алекс. Карл., дир. Сиб. 2-го кад. корпуса.
 571 Ливкинъ, Як. Андр., писм. муж. гимн., Мариамполь.
 572 *Лисовская, Ольга Валеріан. слушат. Сиб. высш. женск. курс., С.-Петербургъ.
 573 Лисовскій, Люц. Іос., Гжатскъ, Смолен. губ.
 574 Лисовскій, Як. Мих., Одесса.
 575 Литвинова, Елиз. Фед., С.-Петербургъ.
 576 Литвиновъ, Оед. Пик., С.-Петербургъ.
 577 Литвиновскій, Пикав. Фед., Варшава.
 578 Литвиновскій, Викт. Порф., Ека-теринпославъ.
 579 Литвиновскій, Петръ Анг., членъ уч. ком. муз. и уч. ком. Учр. Вѣд. Имп. Маріи, С.-Петербургъ.
 580 Литтеровъ, Ин. Андр., Н.-Новгородъ.
 581 Лойдистъ, Ал. др. Платон., С.-Петербургъ.
 582 Лорткианпидасъ, Илар. Таріел., исп. реалн. уч. Кутаисъ.
 583 Лоханько, Осод. Филип., Вѣлостокъ.
 584 Лоховъ, Ник. Тер., Варшава.
 585 Лубкинъ, Петръ Серг. Вильна.
 586 Лукницкая, Над. Век., Кавказъ.
 587 Лукьяновъ, Зористъ Ник., Кіовъ.
 588 Лунаковъ, Пав. Серг., Одесса.
 589 Лундбергъ, Энг. Юлиан., г.-м., писм. I корп., Сиб.
 590 Лункица, Анна Георг., Ставрополь.
 591 *Луръс, Влюма Абр., слуш. Выс. жепск. кур., С.-Петербургъ.
 592 Луницкій, Влад. Ос., Екатеринбургъ.
 593 Львова, Екат. Ильин., С.-Петербургъ.
 594 Львовъ, Викт. Дмитр., Кунгуръ.
 595 Львова, Клавд. Дмитр., С.-Петербургъ.
 596 Лыницкая, Ал. Вас., нач. гимн., Умань, Киевск. губ.
 597 Лѣсковъ, Сильв. Грег., анн. муж. гимн., Вилькомбергъ, Ковенской губ.
 598 Любовичъ, Влад. Ин., Имбургъ.
 599 Люденитъ, Ольга Юліанна, С.-Петербургъ.
 600 Лютинъ, Апт. Вас., С.-Петербургъ.
 601 Лямбекъ, Эмилъ Эр., С.-Петербургъ.
 602 Ляуре, Оттонъ Оттон., Пари.
 603 Магалдъ, Бор. Исакъ, Воронежъ.
 604 Масвская, Елиз. Виктор., Мунинъ, Полт. губ.
 605 Мавниъ, Карлъ Карл., дир. реалн. уч., Москва.
 606 Маурмовичъ, Ник. Петр., Милтопиръ.
 607 Майделъ, бар., Влад. Христоф., С.-Петербургъ.
 608 Макарова, Надежда Анполов., нач. жен. гимн., С.-Петербургъ.
 609 Макаревичъ, Іосифъ Генр., С.-Петербургъ.
 610 Маклашинъ, Вас. Алекс., Орелъ.
 611 Макриповъ, Евгеній Ник., Вѣлополье, Харьковъ.
 612 Макшесъ, Зах. Андр., г.-л., дир. Иед. Муз., С.-Петербургъ.
 613 Маликова, Анна Андр., С.-Петербургъ.
 614 Малавинъ, Афан. Гаар., гл. исп. по уч. части Мил. Торг. и Пром., С.-Петербургъ.
 615 Малиновская, Зин. Фр., С.-Петербургъ.
 616 Малина, Ольга Вас., Самара.
 617 Май, Кур. Вас., дир. гимн., Петроковъ.
 618 Майскаъ, Серг. Осипов., С.-Петербургъ.
 619 Мавюковичъ, Андр. Ин., С.-Петербургъ.
 620 Максимовъ, Евг. Алекс., Порховъ.

- 621 Маловичко, Вл. Кан., Херсонъ.
 622 Малышева, Вар. Никол., Хаба-
 ровскъ.
 623 Мальденъ, Ян. Ильичъ, Медяно-
 поль.
 624 Мамонтова, Елена Алекс., Пяти-
 горскъ.
 625 Манчестъ, Пав. Петр., Смо-
 ленскъ.
 626 Мартынова, Евг. Серг., С.-Петер-
 бургъ.
 627 Марковъ, Абр. Ефр., С.-Петер-
 бургъ.
 628 Марковичъ, Богд. Афан., С.-Пе-
 тербургъ.
 629 *Маркусъ, Шейла Мойб., слух.
 кур. Невг., С.-Петербургъ.
 630 Марутаева, Марія Степ., г. Том-
 никова, Тамб. губ.
 631 Мартыновъ, Ив. Иван., С.-Петер-
 бургъ.
 632 Марцелли, Алекс. Иванович., Харь-
 ковъ.
 633 Масленко, Вик. Васил., Копловъ,
 Тамб. губ.
 634 Масловъ, Гр. Конст., С.-Петер-
 бургъ.
 635 Матвеевъ, Огд. Ник., дпр. реал.
 учил., Юрьевъ.
 636 Митомошниковъ, Иван. Торонт., Киевъ.
 637 Махронскій, Викт. Еннад., Пе-
 тровскъ, Саратовъ.
 638 Милотисъ, Францъ Ив., Рига.
 639 Милотисъ, Ив. Ив., Вильна.
 640 Минякина, Марія Вас., Вобри-
 нскъ, Херс. губ.
 641 Мебурцишвили, Амврос. Внес.,
 Виза, Сидл. губ.
 642 Медвидовъ, Алекс. Иван., Воро-
 нежскъ.
 643 Месерольтъ, Ел. Нат., зап. пач.
 учил., С.-Петербургъ.
 644 Месертъ, Руд. Алекс., Лубны, Полт.
 губ.
 645 Мей, Петръ Петр., Пйлостокъ.
 646 Мельникова, Дина Дан., Курскъ.
 647 Мелюжанскій, Влад. Мих., С.-Пе-
 тербургъ.
 648 Мелюжанскій, Петръ Андр., С.-Пе-
 тербургъ.
 649 Мельникоу, Ив. Мих., Великій
 Устюгъ.
 650 Мерсало, Луи Леон., Велсбей,
 Уфимъ. губ.
 651 Мергасова, Анф. Степ., Астрахань.
 652 Мецкерскій, Алекс. Михайлов.,
 Псковъ.
 653 *Микельсбергъ, Фридрихъ Густ.,
 Гиссаль.
 654 Милютинъ, Вор. Вас., С.-Петер-
 бургъ.
 655 Мининъ, Влад. Конст., Вар-
 шана.
 656 Мипсоевъ, Андр. Дмитр., Пжеждъ.
 657 Мниуханъ, Георг. Михайл., С.-Пе-
 тербургъ.
 658 Мировова, Енат. Мих., Вольскъ,
 Саратовъ. губ.
 659 Мисирова, Марія Керан., С.-Пе-
 тербургъ.
 660 Митропольскій, Ал. Матв., Пенза.
 661 Михайловъ, Влад. Дмитр., С.-Пе-
 тербургъ.
 662 Михайловъ, Ник. Семан., С.-Пе-
 тербургъ.
 663 Михайловъ, Сем. Алекс., С.-Пе-
 тербургъ.
 664 Михеичъ, Алекс. Пет., гоп.-л.,
 С.-Петербургъ.
 665 Мишеникинъ, Алекс. Степ., П.-
 Новгородъ.
 666 Миштовъ, Надежда Шик., С.-Пе-
 тербургъ.
 667 *Монсесико-Великая, Тат. Ник.,
 слух. лекск. молл. курсовъ,
 С.-Петербургъ.
 668 *Монсесико, Вил. Никол., окуп.
 Моск., Вилан. жон. курсы,
 Москва.
 669 Молявъ, Огд. Эдуардъ, зап. проф.
 Том. Техн. Инст., г. Томскъ.
 670 Молчалива, Анна Шик., Сумъ,
 Харьковъ. губ.
 671 Молчановъ, Шик. Конст., Пятка.
 672 Моричевскій, Вячесл. Григ., дпр.
 комм. учил., Кривой Рогъ,
 Херс. губ.
 673 Мордухай-Волтовской, Дж. Дж.,
 проф., Варшава.
 674 Моревъ, Влад. Иванов., Борисо-
 глебскъ, Там. г.
 675 Моряхина, Анна Фед., С.-Петер-
 бургъ.
 676 Морозовъ, Вал. Алекс., Калуга.
 677 Морозовскій, Сем. Цесляг., С.-
 влополь-губ.
 678 Моронкинъ, Ал-дръ Иван.,
 Москва.
 679 Морсковъ, Ив. Вас., Кирсановъ,
 Тамбовск. губ.
 680 Москвитинъ, Ник. Иван., Варшавъ.
 681 Москалевицъ, Маур. Федоров.,
 Вильна.
 682 Мошечко, Васил. Никол., Харь-
 ковъ.
 683 Мошечко, Елена Никол., Харь-
 ковъ.
 684 Мрочекъ, Вацл. Ромуальд., С.-Пе-
 тербургъ.
 685 Мукаловъ, Николай Дмитриев.,
 Киевъ.
 686 Муранкинъ, Вас. Вас., С.-Петер-
 бургъ.
 687 Мурашевъ, Влад. Васил., Нижній-
 Новгородъ.
 688 Муравъ, Петръ Алекс., Баку.
 689 Мустровъ, Ив. Ив., Ровно, Во-
 льск. губ.
 690 Мушниковъ, Владим. Федоров.,
 С.-Петербургъ.
 691 Мышинскій, Зоя. Леон., С.-Петер-
 бургъ.

- 692 Мамилъ, Григ. Троф., Вилевъ, Тул. г.
- 693 Назаровъ, Конст.] Фед., С.-Петербургъ
- 694 Наймаръ, Ник. Яковл., Вологда
- 695 Никонкинъ, Леонъ Ксентор., слоб. Пальчинск.
- 696 Николетинскій, Сергѣй Арх., Варшава.
- 697 Пестяковъ, Ал-дръ. Федоров., Тифлисъ.
- 698 Певядомскій, Дмитр. Алексѣев., Цербонъ
- 699 Подалецкій, Влад.] Лукинъ, Воронежъ.
- 700 Пейфельдъ, Влад. Адольф., Варшава.
- 701 Пойкъ, Ник. Алекс., Самара.
- 702 Некрасовъ, Алекс. Виссар С.-Петербургъ.
- 703 Некрасовъ, Влад. Мсониц, проф., Томскъ.
- 704 Некрасовъ, Влад. Алекс., С.-Петербургъ.
- 705 Некрасовъ, Пав. Алексѣев., проф., С.-Петербургъ.
- 706 Немейко, Петръ Григор., Воронежъ.
- 707 Немиллоа, Пландіа Алекс., Норповъ, Мадл. губ.
- 708 Несторенко, Пат. Васил., ст. Володино, Петерб. г.
- 709 Несторовъ, Ник. Фед., С.-Петербургъ, Саратовъ.
- 710 Неговдинъ, Дмитр. Марк., Вердальскъ, Таур. г.
- 711 Нечаевъ, Оед. Лук., С.-Петербургъ.
- 712 Наренитъ, Алекс. Осип., Ипекъ.
- 713 Нефедьевъ, Алекс. Ник., Казань.
- 714 Нехорошова, Мадія Иван., С.-Петербургъ.
- 715 Никаноровъ, Влад. Митрофан., Ярославль.
- 716 *Никитинъ, В. А., ст. Пол. Млет., С.-Петербургъ.
- 717 Николаевъ, Андр. Николаев., Рига.
- 718 Николетъ, Леон. Иван., Урюпинск. слоб. обл. Войск. Донъ
- 719 Никоповъ, Нв. Алекс., Елабуга, Вят. губ.
- 720 Николасъ, Владим. Никол. Новохоперскъ, Воронежск. губ.
- 721 Никольцевъ, Петръ Осд., дир. рем. уч., Гжатскъ, Смоленской губ.
- 722 *Новикова, Анна Никол., слух. мед. вѣст., Сиб.
- 723 Новиковъ, Вас. Васил., дир. пром. учил., гор. Красноуфимскъ, Перм. губ.
- 724 Новиковъ, Влад. Иван., Плоцкъ
- 725 Новосильцевъ, Серг. Васил., дир. комм. учил., Екатеринбургъ. Куб. обл.
- 726 Носовъ, Влад. Владим., С.-Петербургъ.
- 727 Образцовъ, Мах. Захар., С.-Петербургъ.
- 728 Обтмшпернскій, Ив. Серг., Архангельскъ.
- 729 Обуховъ, Ник. Никол., Волгоградъ. Весс. губ.
- 730 Обиштейнъ, Фр. Ад., Рѣжидъ, Витобск. губ.
- 731 Омельный, Вас. Конст., Глуховъ, Черп. губ.
- 732 Оволяпъ, Вильг. Яковл., Митава.
- 733 Окосмовъ, Из. Коандр., дир. гимн., Златополь.
- 734 Окуловъ, Влч. Осип., Вугульма, Сам. губ.
- 735 Овьяшенскій, Алекс. Вас., М. Пемаровъ, Мол. губ.
- 736 Ольшовекая, Марія Клет, Ново-черкасскъ.
- 737 Олоппитъ, Стоп. Семен., Житомиръ.
- 738 Омельяновичъ-Щаповко, Вард. Павл., Лубинъ.
- 739 Омелянскій, Вл. Тих., Кишиневъ. Костр. губ.
- 740 Опишенико, Мих. Нестор., Арзамасъ, Ник. губ.
- 741 Овсозовскій, Ник. Порф., Хвалыньскъ.
- 742 Орловскій, Владим. Иван., Самаркандъ.
- 743 Орловко, Мих. Иван., Варшава.
- 744 Орловъ, С. В., Рига.
- 745 Орловъ, Ив. Евген., Юрьевъ, Мадл. губ.
- 746 Орлова, Марія Ник., Острогомскъ, Воронеж. г.
- 747 Орловскій, Ив. Викент., дир. муз. гимн., Вобруйскъ.
- 748 Ослевскій, Мих. Діон., Варшава.
- 749 Оспитъ, Алекс. Никол., Александрія, Херс. г.
- 750 Остолоповъ, Пил. Иван., С.-Петербургъ.
- 751 Острогорскій, Петръ Ник., Орелъ.
- 752 Остроменскій, Дмитр. Антонов., Кіевъ.
- 753 Остроумена, Алт. Исоп., Тухвинъ, Полт. губ.
- 754 фопъ-Огго, Андр. Витольд., Одесса.
- 755 Очальевскій, Мсон. Вл., С.-Петербургъ.
- 756 Павлова, Анна Петр., Пенза.
- 757 Павлова, Екат. Конст., Нижн.-Новгородъ.
- 758 Павлова, Евг. Осдор., С.-Петербургъ.
- 759 Павловъ, Никол. Александр., Тифлисъ.
- 760 Павляновъ, Петръ Иван., Рига.
- 761 Палитинъ, Ник. Алекс., Варшава.
- 762 Палецкій, Конст. Август., Кіевъ.

- 763 Павласюкъ, Левъ Вас., Елсаветградъ.
 764 Палафутялъ, Никол. Павлов, Каванъ.
 765 Паникевичъ, Влад. Ив., С.-Петербургъ.
 766 Паникинъ, Алекс. Вас., С.-Петербургъ.
 767 Паичевъ, Вѣра Леонид., С.-Петербургъ.
 768 Парадизъ, Над. Никол., Екатеринбургъ.
 769 Парамозова, Над. Дмитр., Оренбургъ.
 770 Парфеновъ, Валент. Михайл., Петрозаводскъ.
 771 Пархоменъ, Влад. Иван., Варшава.
 772 Патроновъ, Вас. Никол., Балаково, Сам. г.
 773 Патроновъ, Пав. Антоп., Одесса.
 774 Пашиновичъ, Станисл. Кевергенъ, Саратовъ.
 775 Пацовскій, Викт. Вас., дир. ком. уч. Крпной-Рогъ, Херс. губ.
 776 Пешкина, Юлія Алекс., Новгородъ.
 777 Пешонжковичъ, Карлъ Болесл., дир. 12-й шк., С.-Петербургъ.
 778 Пешке, Александръ Александр., С.-Петербургъ.
 779 Перещакъ, Ипполитъ Ипполит., С.-Петербургъ.
 780 Перля, Осип. Пет., Ростовъ-на-Д.
 781 Песоцкий, Мих. Никол., Тифлисъ.
 782 Петраневская, Юлиа Федор., Тифлисъ.
 783 Петрова, Марія Вас., Старый-Петергофъ.
 784 Петровичъ, Серг. Георг., гев.-м., С.-Петербургъ.
 785 Петровичъ, Ник. Георг., С.-Петербургъ.
 786 Петровъ, Конст. Михайл., Вельскій Уездъ.
 787 Петровъ, Влад. Ник., Егорьевскъ.
 788 Петровъ, Александръ Иван., Елецъ.
 789 Петропавловскій, С. И., Рига.
 790 Печковский, Валер. Конст., Москва.
 791 Пирожковъ, Александръ Васильев., Исконъ.
 792 Пискуновъ, Иванъ Никол., С.-Петербургъ.
 793 Пичугинъ, Алекс. Георг., инсп. пром. уч., Красноуфимскъ, Перм. губ.
 794 Пиотровский, Борисъ Вронск., С.-Петербургъ.
 795 Пиотровский, Ваз. Льв., Богородскъ.
 796 Пламеневскій, Никол. Иван., Владикавказъ.
 797 Плещинникова, Викторія Рафаил., С.-Петербургъ.
 798 Плеханова, Надежда Георг., Мелитополь.
 799 Плеховъ, Оедоръ Гаврилоп., Саратовъ.
 800 Побѣдинскій, Конст. Иванов., С.-Петербургъ.
 801 Погодинскій, Вячеславъ Артемьев., С.-Петербургъ.
 802 Погориловъ, Пав. Никол., дир. р. уч., Осташковъ.
 803 Погоребская, Вѣра Тимоф., Ейскъ.
 804 Подановскій, Александръ Влад., С.-Петербургъ.
 805 Подгайская, Елена Сергѣев., Ровно, Волын. губ.
 806 Подворжанская, Марія Моис., Екатеринбургъ.
 807 Подгорѣцкій, Ник. Мотр., Тифлисъ.
 808 Подеряпинскій, Николай Ипполитовичъ, Касимовъ, Рязанск. губ.
 809 Подсиданинъ, Ник. Мих., Валяма, Смолен. губ.
 810 Подтапалъ, Ник. Евг., Харьковъ.
 811 Покотило, Марія Иван., Кіевъ.
 812 Покровский, Алексій Мих., Тула.
 813 Покровский, Александръ Ник., Кострома.
 814 Полетскій, Иванъ Иван., Москва.
 815 Полосухина, Ольга Арт., С.-Петербургъ.
 816 Полубинская, Елизаб. Павл., Ровно.
 817 Полухинъ, Евгений Павл., С.-Петербургъ.
 818 Поликовъ, Алексій Петр., Москва.
 819 Поликовъ, Сергій Ник., пос. Юзюнка, Екатеринбургъ.
 820 Поликарповъ, Ростисл. Дмитр., Харьковъ.
 821 Поповъ, Венед. Венед., Витебскъ.
 822 Поповъ, Иван. Иван., С.-Петербургъ.
 823 Поповъ, Мих. Петр., Подольскъ.
 824 Поповъ, Ник. Петр., инсп. реалн. уч., Баку.
 825 Поповъ, Павелъ Иван., Москва.
 826 Поповъ, Алекс. Тимоф., Подольскъ, Моск. г.
 827 Поповиченко, Гавр. Сильв., Харьковъ, Полт. губ.
 828 Попперъ, Георгій Александр., Москва.
 829 Попруженко, Мих. Гринг., сол.-л., С.-Петербургъ.
 830 Поранковъ, Ник. Дм., С.-Петербургъ.
 831 Порохова, Люб. Ник., Им. "Зорьки", Крест. у.
 832 Порывкина, Вѣра Павл., Уржумъ, Вятск. губ.
 833 Посильовская, Елена Андр., Воронежъ.
 834 Поссе, Конст. Алекс., проф., С.-Петербургъ.

- 836 Пастаевъ, Мих. Яков., Харьковъ.
- 836 Постриганьева, Ефрос. Григ., Козловъ, Тамб. г.
- 837 Потоцкій, Владим. Григор., Полонскъ.
- 838 Потоцкій, Пав. Иван., Москва.
- 839 Пржевальскій, Влад. Степ., Шуя, Влад. губ.
- 840 Приходько, Пав. Павл., Еясапетградъ.
- 841 Проворонскій, Ник. Вас., Саратовъ.
- 842 Проворона, Аят. Внаторов., Сибирь.
- 843 Просвѣтловъ, Яковъ Зяп., пис. гимназ., Вилсъ, Лифл. губ.
- 844 Прядильниковъ, Дмит. Григ., С.-Петербургъ.
- 845 Полюхъ, Исавія Алекс., Вердичевъ, Кіевск. губ.
- 846 Пузыловскій, Стеф. Юліанов., Ахабадъ.
- 847 Пустиняиъ, Алексѣй Григ., Пендери, Вессар. г.
- 848 Путяицевъ, Ник. Петров., Рогащевъ, Могил. г.
- 849 Рабировичъ, Петръ Осип., пис. р. уч., Перпоиъ, Лиф. г.
- 850 Рабировичъ, Юрій Германов., Одесса.
- 851 Рабировъ, Ник. Дмитр., М. Новгородъ.
- 852 Равичъ-Шерба, впол. кн. Инк. кад. пори., С.-Петербургъ.
- 853 Рагозинъ, Вагт. Капит., Шилсбургъ.
- 854 Радшевичъ, Нси. Никод., Кроштангъ.
- 855 Радичъ, Алекс. Алекс., проф. С.-Петербургъ.
- 856 Рамидзе, Андрон. Мих., Скопийъ, Рязан. губ.
- 857 Раскавовскій, Мих. Павл., Тамбовъ.
- 858 Расовскій, Сергій Никол., Вышній-Волочекъ, Тверск. губ.
- 859 Разумовъ, В. Н., Астрахань.
- 860 Ракятинъ, Ник. Семен., Одесса.
- 861 Рашевскій, Копет. Ник., Москва.
- 862 Ращенко, Вѣра Иван., Волковыскъ, Гродн. г.
- 863 Ребиндери, Макс. Григ., Юрьевъ, Лифл. губ.
- 864 *Рейнъ, Ольга Абрам., сл. в. ж. к., С.-Петербургъ.
- 865 Рейпольскій, Ник. Алексѣев., Кострома.
- 866 Рейманъ, Авг. Исаков., Валкъ, Лифл. губ.
- 867 Реталовъ, Алекс. Никол., Камеицъ-Подольскъ.
- 868 Ржапцунъ, Серг. Витал., Оханскъ, Перм. губ.
- 869 Роговскій, Альбицъ Ив., Александровскъ, Екат. г.
- 870 Родковичъ, Пав. Павл., дир. гимн., Витебскъ.
- 871 Рождественская, Клавдія Макпдов., Уфа.
- 872 Рождественскій, Алекс. Алексан., Верхнеудинскъ.
- 873 Розановъ, Алекс. Ник., Губинскъ.
- 874 Розановъ, Владим. Александр., С.-Петербургъ.
- 875 Розентъ, Анапій Матв., Пажиль, Черняг. губ.
- 876 Розенбергъ, Алекс. Вас., Карачиъ, Орлов. губ.
- 877 Розлюкъ, Кассіанъ Карп., Лубны, Полт. губ.
- 878 Розумъ, Неонилъ Иван., Лубны, Полт. губ.
- 879 Рейманъ, Александръ Моисеов., Вобруискъ, Милской губ.
- 880 Роминскій, Констант. Петров., Керчь.
- 881 Ростковскій, Вацлавъ Андр., С.-Петербургъ.
- 882 Ростомонъ, Захарій Павл., С.-Петербургъ.
- 883 Розаровъ, Павелъ Игнатъев., Одесса.
- 884 Рубежкая, Индія Владим., Сиб.
- 885 *Рубежскій, Осифъ Сергѣев., Ст. «Варница», Моск.-В.-Уф. ж. д.
- 886 Рудневъ, Вас. Мавренъевъ, Ростовъ на Дону.
- 887 *Рудневъ, Дм. Дм., лѣб. Подат. мушл., С.-Петербургъ.
- 888 Рудницкая, Евг. Клавтиль, Мовдъ.
- 889 Рулис, Аляса Фридрихонна, Вольмаръ, Лиф. г.
- 890 Румянцева, Надежда Петровна, С.-Петербургъ.
- 891 Рута, Иконъ Иванон., пис. ж. учр., Варшава.
- 892 Рудневскій, Валсиславъ Фелицианов., Херсонъ.
- 893 Рыловъ, Сергій Михайлов., С.-Петербургъ.
- 894 Рѣдько, Дм. Алекс., Миргородъ, Полт. губ.
- 895 Рѣвницкій, Ефимъ Іосифъ, Корчела, Твор. губ.
- 896 Ряднова, Талія Никол., Москва.
- 897 Савватѣевъ, Моисейъ Мих., Торжокъ, Твер. губ.
- 898 Салтыковъ, Левъ Никол., С.-Петербургъ.
- 899 Самборская, Фанна Феликс., Тверь.
- 900 Самохваловъ, Полипа Григор., Змевъ, Харьковской губ.
- 901 Самохваловъ, Петръ Алексѣев., С.-Петербургъ.
- 902 Салко, Ампросій Демьянов., Курскъ.
- 903 Саръ, Явъ Гонимов., Юрьевъ, Лифл. губ.
- 904 Саргаджанъ, Григ. Назар., дир. гимн., Золотоноша, Полт. губ.

- 905 Саткелъчъ, Алекс. Александр., проф. Инж. нѣж. Академіи, С. Петербургъ.
- 906 Сахаровъ, Алекс. Борисов., С.-Петербургъ.
- 907 Сахаровъ, Сергій Андр., Богородскъ, Моск. г.
- 908 Сахаровъ, Евг. Алекс., Поломо-скопскъ, Екате- р. г.
- 909 Сахарова, Асепефа Ив., Богучаръ, Ворон. губ.
- 910 Сахновскій, Мих. Аким., Черни-голь.
- 911 Савичъ, Серг. Евг., проф., С.-Пе-тербургъ.
- 912 Саволова, Марія Алекс., Мариам-ноль, Сунак. губ.
- 913 Свида, Мих. Виктор., Екате-рина-поль.
- 914 Свищевскій, Андрей Иванов., Вел-огда.
- 915 Свищевскій, Григ. Кузьм., Киевъ.
- 916 Свещиковъ, Петръ Иван., С.-Пе-тербургъ.
- 917 Свиницковъ, Пав. Ив., дир. реал. учил., Уфа.
- 918 Севастьяновъ, Леон. Степан., Москва.
- 919 Селиверстовъ, Стоп. Степ., С.-Пе-тербургъ.
- 920 Сельскій, Леонидъ Алекс., Вар-шана.
- 921 Селяковъ, Ив. Яковл., Москва.
- 922 Семейкинъ, Евг. Ив., Сунак.
- 923 Семеновъ, Пав. Макс., г. Проску-ровъ, Кам.-Под. г.
- 924 Сергеевко, Ал. Серг., кап., С.-Пе-тербургъ.
- 925 Сергеевъ, Гавр. Петр., Про-славль.
- 926 Серебрянскій, Феликсъ Осип., То-ропецъ, Моконск. г.
- 927 Серебрянникова, Над. Конст., С.-Петербургъ.
- 928 *Сержалская, Софья Фед., слуш. Высш. кур., С.-Петербургъ.
- 929 Сивареничъ, Дм. Дм., дир. Ком. уч., г. Александровскъ, Екат. г.
- 930 Сивовъ, Ильянскій Алекс., С.-Пе-тербургъ.
- 931 Сидоровъ, Ник. Филипп., С.-Пе-тербургъ.
- 932 Сидоровъ, Павелъ Георгиев., Одесса.
- 933 Силиверстовъ, Ив. Вас., С.-Пе-тербургъ.
- 934 Симакова, Евг. Конст., Богоро-дницъ, Тульск. г.
- 935 Синаковъ, Влад. Ив., С.-Пе-тербургъ.
- 936 Сивильниковъ, Вас. Ефим., С.-Петербургъ.
- 937 Сиповицскій - Трофимовъ, Ник. Триандеф., Киевъ.
- 938 Сницковъ, Дм. Матв., проф., Харь-ковъ.
- 939 Снявская, Елиза. Алекс., Сня-вань, Симб. губ.
- 940 Снявскій, А. С., дир. ком. уч., Екатеринбургъ.
- 941 Сняверъ, Ник. Ал., Г. Александровскъ, Екат. г.
- 942 Снявский, Ил. Гаврил., Митавъ.
- 943 Спроткляъ, Конст. Мих., С.-Пе-тербургъ.
- 944 Скапанъ, Ив. Алекс., С.-Петер-бургъ.
- 945 Скорошллова, Анна Ник., Мунъ Влад. губ.
- 946 Спрыняковъ, Вас. Степ., Елати-ма, Тамбовск. г.
- 947 Скороходъ-Левченко, А. М., Но-вочеркасскъ.
- 948 Скубченко, Мих. Моис., Злато-поль.
- 949 Славянский, Евг. Вас. Керчи.
- 950 Славнолюбовъ, Павелъ Никол. Ценалино, Нижегород. г.
- 951 Славовъ, Ник. Павлов., Рига.
- 952 Смирнова, Юлія Алекс., С.-Пе-тербургъ.
- 953 Смирнова, Валент. Викт., С.-Пе-тербургъ.
- 954 Смирнова, Марія Ильинична, Симферополь.
- 955 Смирновъ, Борисъ Викт., Юзель, Екате-рина-поль. г.
- 956 Смирновъ, Пав. Агапанел., С.-Мара.
- 957 Смирновъ, Евг. Ив., г. Юрьевъ, Инфл. губ.
- 958 Смирновъ, Петръ Дмитр., влест. Темирг. мужск. прог., стан. Те-миргаевская, Куд. обл.
- 959 Смирновъ, Влад. Иванов., С.-Пе-тербургъ.
- 960 Смирновъ, Павелъ Алекс., Го-строма.
- 961 Смолевскій, Арс. Оед., С.-Пе-тербургъ.
- 962 Сидспрева, Елена Осдоронн., Ново-російскъ.
- 963 *Сивкицкий, Ив. Алекс., слуш. пед. кур., Казань.
- 964 Соколовъ, Матроф. Александр., Москва.
- 965 Соболевъ, Тим. Григ., Гжатскъ, Смолен. губ.
- 966 Саволова, Анна Ив., С.-Петер-бургъ.
- 967 Соколова, Ек. Вас., Симфе-рополь.
- 968 Соколовъ, Викт. Ив., Саратовъ.
- 969 Соколовъ, Ив. Ив., Москва.
- 970 Соболевъ, Петръ Моисеев., Мос-ква.
- 971 Соболевъ, Алекс. Васильев., Рязань.
- 972 Соколовъ, Ник. Самсо-в., дир. Ярослав. Реал. Уч.
- 973 Соколовъ, Вадимъ Семеев., Там-бовъ.

- 974 Соколовъ, Вас. Алексѣев., Май-
ковъ, Кубанск. губ.
- 975 Соколовъ, Ник. Павл., С.-Петер-
бургъ.
- 976 Соколыская, Елиза. Зах., Пенза.
- 977 Соколовскій, Сергѣй Ив., пред-
сѣд. Иск. Общ-та жен. гимн.,
Маріинскъ, Тамб. губ.
- 978 *Соколовскій, Сергѣй Ром., слух.
учит. кл. воспит. низш., С.-Пе-
тербургъ.
- 979 Соловьева, Алла Влад., С.-Пе-
тербургъ.
- 980 Соловьевъ, Иванъ Семен., Мо-
сква.
- 981 Соловьевъ, Фед. Павл., С.-Пе-
тербургъ.
- 982 Соловьевъ, Ив. Ив., Смоленскъ.
- 983 Соколовъ, Пав. Иосиф., проф.,
С.-Петербургъ.
- 984 Солнышковъ, Георгій Мих., испи-
сникъ, Петрозаводскъ.
- 985 Солицъ, Мар. Иосиф., С.-Петер-
бургъ.
- 986 Софійская, Ольга Ив., нач. жен.
Маріинск. гимн., Ваку.
- 987 Софроновъ, Серг. Алексан., Ива-
ново-Вознесенскъ, Владимир.
губ.
- 988 Сошниковъ, Марія Истр., Але-
ксандровъ, Влад. губ.
- 989 Спиринскій, Евгений Введенкто-
вичъ, Москва.
- 990 Срединскій, Серг. Ант., Камы-
шинъ, Саратов. губ.
- 991 Срединская, Евг. Мих., Камы-
шинъ.
- 992 Стандровскій, Ив. Ив., Гомель.
- 993 Стацкевичъ, Ив. Ив., Петроковъ.
- 994 Старынкевичъ, Ада Дмитриевна,
С.-Петербургъ.
- 995 Старынкевичъ, Дм. Сократ., низш-
техн., С.-Петербургъ.
- 996 Стеблинская, Алекс. Иероним.,
С. Петербургъ.
- 997 Стельмаховичъ, Евд. Леонт.,
Вессегопскъ, Твор. губ.
- 998 Степанова, Лидія Ильин., Ре-
пель.
- 999 Струве, Вас. Бернардов., дър.
Меж. Ин., Москва.
- 1000 Струкова, Елена Иван., Верхо-
турье.
- 1001 Стурцель, Борисъ Рудольфов.,
Лодзь.
- 1002 Сулаквелидзе, Конст. Авакаум.,
Рост. на Дону.
- 1003 Султанъ-Шахъ, Екат. Сем.,
С.-Петербургъ.
- 1004 Сумишевскій, Сягизм. Степ.,
Вердичевъ.
- 1005 Супина, Левъ Борис., Москва.
- 1006 Супруненко, Нах. Вас., Луб-
ны, Полтав. губ.
- 1007 Суряна, Нина Мих., Княшина.
- 1008 Суринъ, Левъ Самойл., Вильна.
- 1009 Сухарникова, Анна Мих., Мо-
сква.
- 1010 Сухинина, Елиза. Гринг., Тула.
- 1011 Сухомъ, Надежда Андреев., Мо-
гаденъ, Камолетъ-Подольскъ.
- 1012 Сушковъ, Ваикт. Владим., Гроз-
ный, Терск. обл.
- 1013 Сырейниковъ, Серг. Серг., Ро-
славль, Смолен. г.
- 1014 Сысоевъ, Конст. Павл., Стар.
Оскол., Курск. губ.
- 1015 Сѣдлецкій, Конст. Ферд., Ак-
тирка, Харьк. губ.
- 1016 Таганцева, Люб. Степ., нач.
гимн., С.-Петербургъ.
- 1017 Толузакова, Пав. Павл., Пенза.
- 1018 Тарасовъ, Павелъ Петров.,
Томскъ.
- 1019 Тарловскій, Влад. Ник., Ро-
стовъ на-Дону.
- 1020 Татарковичъ, Владисл. Иосиф.,
Чистохонтъ.
- 1021 *Таубе, бар., Мих. Фердинандъ,
виж. Пут. Сообщ., С.-Петер-
бургъ.
- 1022 Твердинъ, Вас. Степанов., Вѣ-
женскъ, Твор. г.
- 1023 Тенбергъ, Дм. Эд., С.-Петер-
бургъ.
- 1024 Теодоровичъ, Нв. Григор., Мо-
сква.
- 1025 *Теръ-Степанянъ, Ин. Степ.,
низш. пут. сооб., С.-Петербургъ.
- 1026 Тисенгаусенъ, Бор. Михайл.,
Херсовъ.
- 1027 Тикиджан-Хамбуровъ, Іоак. Ма-
нупл., Пахчисвалъ на-Дону.
- 1028 Тишаненко, Нв. Гавр., Екате-
ринодаръ.
- 1029 Тихомировъ, Вас. Ник., Але-
ксандровъ, Влад. г.
- 1030 Тихомировъ, Ник. Вениамин.,
С.-Петербургъ.
- 1031 Тихонова, Елена Львовна, Ст.
Лабинская, Куб. области.
- 1032 Тихоновъ, Ник. Иван., Харь-
ковъ.
- 1033 Тихоновъ, Дм. Алексѣев.,
Либавъ.
- 1034 Тоболькинъ, Алекс. Иван.,
Сумы, Харьк. губ.
- 1035 Токаревъ, Влад. Влад., Поло-
московскъ, Екат. г.
- 1036 Токмачевъ, Пав. Михайл., Кроп-
штадтъ.
- 1037 Толкичевъ, Фед. Максимил.,
писп. 11-ой гимн., С.-Петер-
бургъ.
- 1038 Толмачевъ, Алекс. Никол., Окр.
Искп., Царское Село.
- 1039 Толмачевъ, Серг. Ник., С.-Пе-
тербургъ.
- 1040 Тамашева, Нина Артем., С.-Пе-
тербургъ.
- 1041 Тамашевичъ, Евгений Степ., Мо-
сква.

- 1012 Томляницъ, Ник. Аркад., С.-Петербургъ.
- 1013 Тонъ, Мюль. Устан., Екатеринодаръ.
- 1014 Тодоркова, Алекс. Уриг., С.-Петербургъ.
- 1015 Тороновъ, Колет. Алекс., дир. реалн. уч., Оренбургъ.
- 1016 Точинский, Мюль. Алт., лач. техн. жол.-дор. уч., Кемеровъ, Черныг. губ.
- 1017 Трапезникъ, Ни. Матв., дир. хм. техн. учил., С.-Петербургъ.
- 1018 Трансилькани, Ира. Гавр., Вилонскъ, Новгородъ.
- 1019 Трескина, Алекс. Алекс., Воронежскъ, Там. г.
- 1020 Трофимовъ, Конст. Валд., Куровъ, Лиф. губ.
- 1021 Троицкий, Всев. Петр., Понородъ.
- 1022 Троицкий, Ив. Вас., ст. Вологд., Никол. ж. д.
- 1023 Троицкая, Клавдія Петр., С.-Петербургъ.
- 1024 Трубинъ, Феликсъ Георг., Пермь.
- 1025 Тулодницкій, Казим. Конст., Люблинъ.
- 1026 Тумерманъ, Абр. Михайл., Одесса.
- 1027 Туныкова, Над. Иван., Понородъ.
- 1028 Туралскій, Васил. Павл., Пермь.
- 1029 Туркина, Ира. Матв., слух. высш. жол. курс., С.-Петербургъ.
- 1030 Тюрковъ, Мих. Влад., Тосжокъ, Твер. губ.
- 1031 Тяпкая, Люб. Ник., С.-Петербургъ.
- 1032 Умилекій, Серг. Ни., Омскъ.
- 1033 Ульманъ, Над. Сем., С.-Петербургъ.
- 1034 Ураевскій, Влад. Мих., Спиритонъ.
- 1035 Усенскій, В. Ал., Ст. Лабинская, Куб. обл.
- 1036 Устинова, Юлія Алекс., Пенза.
- 1037 Утки, Цоварій Юльск., Варшава.
- 1038 Умаковъ, Ник. Серг., Балазовъ, Саратов. губ.
- 1039 Фаити, Валер. Константин., Кемеровъ.
- 1040 Фармаковская, Антонина Святослав., Козловъ, Тамбов. губ.
- 1041 Федорова, Ольга Ник., слух. высш. жол. курс., С.-Петербургъ.
- 1042 Федоровъ, Шля. Фед., Тверь.
- 1043 Федоровичъ, Стан. Франц., С.-Петербургъ.
- 1044 Федоровичъ, Софія Іосиф., С.-Петербургъ.
- 1045 Фяляновичъ, Стан. Окт., Вугруславъ, Самар. губ.
- 1046 Ферингеръ, Анна Богд., С.-Петербургъ.
- 1047 Ферстеръ, Вл. Ник., Кильцы.
- 1048 Фессеяко, Вал. Мих., Харьковъ.
- 1049 Филанкоповъ, Ник. Вас., Выборгъ.
- 1050 Филипповичъ, Фяляницъ Вас., С.-Петербургъ.
- 1051 Филипповъ, Алекс. Іосиф., Могилевъ-Подол.
- 1052 Филипповъ, Вал. Мих., С.-Петербургъ.
- 1053 Фипсельштейнъ, Вл. Ефд., явл. м. шип., Ромны, Полт. губ.
- 1054 Флоровъ, Метръ Степ., дир. реал. уч., Урюпинская станція.
- 1055 Фокинъ, Ник. Мартин., Торжокъ, Твер. губ.
- 1056 Франкъ, Мих. Люда., С.-Петербургъ.
- 1057 Фурманъ, Рудольфъ Рудольф., С.-Петербургъ.
- 1058 Хабаровъ, Ив. Петр., окр. влс. губ. окр., С.-Петербургъ.
- 1059 Ханакондула, Лая Дм., Одесса.
- 1060 Харитъ, Вал. Лео., Клинскъ.
- 1061 Харченко, Ник. Оед., Ромны, Полт. губ.
- 1062 Херсонскій, Грлг. Хрисанф., Самара.
- 1063 Хмиллпиль, Пав. Пол., Пермь.
- 1064 Ходкинъ, Влад. Никитичъ, Понородъ.
- 1065 Холосаевскъ, Томск. губ.
- 1066 Холена, Вал. Петр., Новоросійскъ, Черном. губ.
- 1067 Ходялицкій, Алекс. Ив., г. Александрополь, Эр. г.
- 1068 Холодовскій, Евг. Алекс., С.-Петербургъ.
- 1069 Хорнать, Клим. Алекс., Капаль.
- 1070 Хоронякова, Марія Георг., Киевъ.
- 1071 Хоженъ, С. А., лач. ж. гмил., Понородъ.
- 1072 Христіановъ, Бор. Алекс., С.-Петербургъ.
- 1073 Хрущевскій, Мих. Ник., С.-Петербургъ.
- 1074 Худяевскій, Ник. Алекс., Рязань.
- 1075 Хухлякъ, Василій Серг., Понородъ, Конск. губ.
- 1076 Царда, Людмила Пгнатъевна, Псковъ.
- 1077 Цытасва, Люб. Гур., Кострома.
- 1078 Цытковъ, Ив. Явл., С.-Петербургъ.
- 1079 Цегеръ, Ек. Вас., Екатеринбургъ.
- 1080 Цыверинъ, Дм. Петр., С.-Петербургъ.
- 1081 Цитронъ, Маркт. Лео., ред.-пзд. «Сотрудникъ», С.-Петербургъ.

- 1111 Цубербиллеръ, Ольга Инк., Москва.
- 1112 Цытопичъ, Эр. Илат., дир. реальн. учил., Царское Село.
- 1113 Цабунцевко, Ольга Ин., Петро-
ваподскъ.
- 1114 Чайкина, Юл. Аф., С.-Петер-
бургъ.
- 1115 Чайхани, Бор. Конст., Яро-
славль.
- 1116 Чебышевъ-Дмитріевъ, Алексѣй
Ал., С.-Петербургъ.
- 1117 Чесолосовъ, Серг. Степ., директ.
реальн. учил. Хорошъ, Полт.
губ.
- 1118 Чеснокъ, Оед. Мих., Кіевъ.
- 1119 Чепурный, Инк. Ин., Воронежъ.
- 1120 Черновъ, Мих. Яковл., Новыи
Вугъ, Херсон. г.
- 1121 Чернобровкинъ, Ин. Алекс.,
Кіевъ.
- 1122 Чернышевъ, Инк. Вас., С.-Пе-
тербургъ.
- 1123 Челосткивъ, Ин. Александр.,
Рига.
- 1124 Чемериновъ, Грин. Александр.,
Ковно.
- 1125 Чеспоковъ, Инк. Дм., Оренбургъ.
- 1126 Чесфрановъ, Мих. Иван., Ири-
тинъ, Полт. губ.
- 1127 Чирхинъ, Дим. Палф., Алатырь,
Самб. губ.
- 1128 Чистяковъ, Иосифъ Ин., Москва.
- 1129 Чистяковъ, Алекс. Ин., Тула.
- 1130 Чихаловъ, Богд. Павл., дир.
ком. уч., Минскъ.
- 1131 Чихладзе, Ен. Ин., Вану.
- 1132 Чичибабинъ, Инк. Ав. Юлиан-
ноградъ.
- 1133 *Чуркала, Варвара Инк., слух.
Свб. высш. жен. курс., С.-Пе-
тербургъ.
- 1134 Чувакина, Елиз. Пикапор.,
Вятка.
- 1135 Чухаевъ, Иван. Мих., Таганрогъ.
- 1136 Чабинскій, Вас. Семенов.,
Москва.
- 1137 Чашениковъ, Николай Алек-
сандр., проф. техн. учил., Мо-
сква.
- 1138 Чашениковъ, Алекс. Инк.,
дир. комм. уч., Целково, Сѣв.
дор.
- 1139 Шарбе, Серг. Вак., Екатерино-
славъ.
- 1140 Шатиловъ, Георг. Вас., С.-Петер-
бургъ.
- 1141 Шатуновскій, Сам. Ос., прип.
дом., Одесса.
- 1142 Шафранова, Юлія Семен.,
С.-Петербургъ.
- 1143 Шебелевъ, Владимъ Дм., Екате-
ринодаръ, Куб. обл.
- 1144 Шевелевъ, Инк. Алекс., Томскъ.
- 1145 Шеляпинъ, Ильа Ин., инсп.
торг. школ., Вологда.
- 1146 *Шеминская, Ел. Алекс., слух.
Востуж. курс., С.-Петербургъ.
- 1147 Шемановъ, Инк. Инк., Влади-
миръ на Клязьмѣ.
- 1148 Шенкманъ, Алекс. Тим., С.-Пе-
тербургъ.
- 1149 Шергинъ, Алекс. Мих., Екате-
ринославъ.
- 1150 Шестаковъ, Аркад. Яковл., Мо-
гилевъ-губерн.
- 1151 Шестаковъ, Леонидъ Ин., С.-Пе-
тербургъ.
- 1152 Шестовъ, Оед. Алекс., г. Орши,
Могил. губ.
- 1153 Шидловскій, Влад. Іудіанов.,
ген. м., Витебскъ.
- 1154 Шиповскій, М. П., Рига.
- 1155 Шиффъ, Вѣра Іосифъ, С.-Петер-
бургъ.
- 1156 Шипкина, Ольга Ин., Москва.
- 1157 Шларбъ, Феофилаъ Оедор., Гат-
чина.
- 1158 Шларсмайеръ, Алекс. Ин.,
Сороки, Весс. губ.
- 1159 Шмелевъ, Алекс. Инк., Астана.
- 1160 Шохоръ-Троцкий, Сем. Ильичъ,
С.-Петербургъ.
- 1161 Шмировъ, Алекс. Алекс., С.-Пе-
тербургъ.
- 1162 *Шпилюко, Ав. Алекс., студ.
Горн. Инст., С.-Петербургъ.
- 1163 Штепенко, Анд. Ин., Кишиневъ.
- 1164 Штейнъ, Елена Адольфъ, С.-Пе-
тербургъ.
- 1165 Штемпель, Георг. Конст., дир.
гим. реальн. уч., С.-Петербургъ.
- 1166 Шенбергъ, Сергій Павл., Кіевъ.
- 1167 Шенбергъ, Елиз. Конст., Кіевъ.
- 1168 Шимановскій, Леонидъ Иванович.
г. Рязань, Минск. губ.
- 1169 Штернбергъ, Густавъ Густанов.,
инсп. учил. при Реформ.
церкви, С.-Петербургъ.
- 1170 Штепенко, Мих. Зах., Екате-
ринодаръ.
- 1171 *Шульцина, Надежда Яковл.,
слух. высш. жен. курс.,
С.-Петербургъ.
- 1172 Шульцъ, Л. Я., Екатеринбургъ.
- 1173 Шумаковъ, Дм. Льв., С.-Петер-
бургъ.
- 1174 Шумиловъ, Вас. Ин., Томскъ.
- 1175 Шумахеръ, Пав. Алекс., инсп.
Калин. 2-й муж. г., Кишиневъ.
- 1176 Шеголева, Зин. Данил., С.-Пе-
тербургъ.
- 1177 Шеголова, Марія Ин., С.-Пе-
тербургъ.
- 1178 Шербанъ, Ин. Евф., Екатерино-
славъ.
- 1179 Шербаневичъ, Марія Моисѣвна,
С.-Петербургъ.
- 1180 Шолковъ, Алексѣй Алексѣевъ,
В.-Волочекъ.
- 1181 Шетковская, Іидія Мих., С.-Пе-
тербургъ.

- 1182 Щуцкій, Андрей Влад., Грозный, Терек. обл.
 1183 Эверсъ, П. М., Ядринъ, Казан. губ.
 1184 Энгштейнъ, Михаилъ Серг., Арзамасъ, Нижегород. г.
 1185 Эренфестъ, Тат. Алексѣев., С.-Петербургъ.
 1186 Эренфестъ, Павелъ Сигизмундов., С.-Петербургъ.
 1187 Эрлеръ, Ник. Александр., С.-Петербургъ.
 1188 Эрль, Осдоръ Александр., Рига.
 1189 Юзбашевъ, Павелъ Артемьев., Кйскъ, Куб. обл.
 1190 Юповичъ, Арнольдъ Моис., С.-Петербургъ.
 1191 Юрговъ, Евг. Алекс., Екатеринбург. губ.
 1192 Юрговъ, Павелъ Христіан., Либана.
 1193 Юрговъ, Сераф. Вас., Екатеринбург. губ.
 1194 Юрговъ, Рейнг. Георг., Пинскъ, Мин. губ.
 1195 Юрисевичъ, Ал. Анд., Георгиевскъ, Торской обл.
 1196 Юсевичъ, Адрианъ Иовил., С.-Петербургъ.
 1197 Яковъ, Из. Фердинандов., Рига.
 1198 Яковлева, Ал. Ковст., Саратовъ.
 1199 Яковлева, Елиз. Мих., Дорогобужъ, Смолен. губ.
 1200 Яколевъ, Павелъ Александр., Воронежъ.
 1201 Яковлевъ, Петръ Дмитр., Александрія, Херсон. г.
 1202 Яковлевъ, Алев. Ал., приг. къ проф. зв., Каваль.
 1203 Яковичъ, Павелъ Адам., Вильна.
 1204 Яковская, Ольга Петр., Славянскъ, Харьков. г.
 1205 Яковский, Петръ Станисл., С.-Петербургъ.
 1206 Яновичъ, Анат. Иванов., С.-Петербургъ.
 1207 Яновская, Елена Нв., м. Городище, Киевской г.
 1208 Ярославлевъ, Леон. Сем., С.-Петербургъ.
 1209 Ярошенко, Ал. Арх., исп. реальн. учил., Карсъ.
 1210 Яськовъ, Аркад. Степ., Орелъ.
 1211 Янжулъ, Екатерина Никол., членъ отд. Ученнаго Ком. М. П. Пр. по техн. и проф. образов., С.-Петербургъ.
 1212 Яковичъ, Вор. Алексѣев., Ростовъ н/Д.
 1213 Яфа, Ольга Виктор., С.-Петербургъ.
 1214 Яддесовъ, Серг. Ин., Саратовъ.
 1215 Яддорскій, Дм. Алекс., нач. техн. учил., Тула.
 1216 Янцкевичъ, Марія Михайловна, Москва.
 1217 Янцкевичъ, Ник. Павлов., С.-Петербургъ.

Замѣченныя опечатки:

Напечатано:

Слѣдуетъ читать:

Въ I-мъ томѣ:

Стр. 27 положенія	наложенія
» 29 левѣстный порядокъ	налѣстный парадоксъ
» 44 отдѣльныхъ	остальныхъ
» 303 Нижегородскаго Математическо-астрономическаго кружка	Нижегород. Кружка любителей физики и астрономіи.
» 442 Къ моему курсу	къ этому сборнику

Во II-мъ томѣ:

Стр. 55, ппву, Вреля	Вореля
» 94, п. III, предложенія	предложенія
» 105, естественной	естественной
» 109 Lionardo	Leonardo
» 112 $2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	$2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
» 117 Гери до	Гориадо

Книги по математикѣ, издавныя И. И. Горбуновымъ-Посадовымъ.

Е. ГОРБУНОВА и И. ЦУНЗЕРЪ.

Живыя числа, живыя мысли, руки за работой.

КНИГА ПЕРВАЯ.

Первые шаги маленькаго математика. Первый годъ обученія арифметикѣ въ школѣ и семьѣ, разработанный на основѣ дѣтской самостоятельности, на опытѣ и наглядности со множествомъ рисунковъ. Цѣна 35 к.

Наглядныя таблицы умноженія, составленныя по методу, положенному въ книгѣ «Первый годъ обученія въ начальной школѣ» (см. 55 стр.). (9 таблицъ). Составлены Е. И. Фортунатовой и И. К. Шлегель. Въ картон. трубкѣ. Цѣна 1 р. 60 к.

Арифметика Л. Н. Толстого. Часть первая.—Цѣлыя числа. Часть вторая.—Дроби. Съ указаніями для руководителя о преподаваніи арифметики. Съ предисловіемъ Н. Буланже—«о значеніи арифметики Л. Толстого» Цѣна 25 к.

Новая геометрія. Систематическій курсъ геометріи, положенный согласно съ законами познанія. Общедоступное руководство для обученія и самообученія. Е. И. Попова. Книга первая. **Наглядная геометрія на плоскости** (интуитивная илиметрія) съ 513 рисунками и чертежами. Ц. 1 р. 20 к., въ папкѣ 1 р. 40 к.

Наглядная геометрія. Пособіе для обученія и самообученія геометріи Вильяма Кембеля. Съ 314 рисунк. и чертежами. Переводъ съ англійскаго Е. Попова. Цѣна 1 руб., въ папкѣ 1 р. 20 к., въ кожаномъ переплетѣ 1 р. 40 к.

Какъ я училъ моего мальчика геометріи. Первые уроки геометріи для дѣтей. Л. Гурвича. Съ 214 рис. Цѣна 35 к., въ папкѣ 50 к.

Лезантъ, К. Докторъ математическихъ наукъ, преподаватель Политехникума въ Парижѣ. Новыя пути ознакомленія дѣтей съ математикой. Книга, написанная друзьями дѣтства. Съ 98 рисунками. Цѣна 55 к., въ папкѣ 75 к.

Камескасъ, ИС. Какъ заниматься съ помощію ознакомителя съ математикой, набора складныхъ кубиковъ, дающаго возможность легко приѣмлять на практикѣ принципы К. Лавая. Съ 15 рис. Цѣна 15 коп., въ папкѣ 25 к.

Герлахъ, А. Какъ преподавать дѣтямъ арифметику въ духѣ творческаго воспитанія. Съ предисловія О. Забѣля. Выпускъ 1-й. Цѣна 35 к.

Продаются въ отдѣленіи склада издательства «ПОСРЕДНИКЪ» (С.-Петербургъ, Невскій, 84, кв. 89), въ книжномъ магазинѣ «ПОСРЕДНИКЪ» (Москва, Петровская линія), въ другихъ книжныхъ магазинахъ и земскихъ книжныхъ складахъ. Выписывать изъ главнаго склада издательства. Москва, Арбатъ, домъ 36. И. И. Горбунову.

Отсюда же высылается бесплатно полный каталогъ издательства.